

достаточны, а в случае невырожденности и необходимы, для оптимальности опорного управления $\{u, S_{\text{оп}}\}$.

Алгоритм. Для произвольного момента $t \in T$ сформируем задачу

$$\psi'(t)B(t)u \rightarrow \max, D(t)u = f(t), d_*(t) \leq u \leq d^*(t). \quad (9)$$

Введем три параметра $J_{\text{оп}}, \tau, \tau_0$.

1. Зададим $J_{\text{оп}} = \emptyset, \tau = t^*, \tau_0 = 0$.

2. При $t = \tau$ решим задачу (9) двойственным двухфазным алгоритмом, описанным в [1], с начальной опорой $J_{\text{оп}}$. Пусть $\{u(\tau), D_{\text{оп}}(\tau)\}$ — оптимальный опорный план. Здесь $D_{\text{оп}}(\tau) = D(K, J_{\text{оп}}(\tau) | \tau)$.

3. По $D_{\text{оп}}(\tau)$ вычислим вектор-функцию $u'(t | \tau) = c_{\text{оп}}(t | \tau) D_{\text{оп}}^{-1}(\tau)$, где $c_{\text{оп}}(t | \tau) = (c_j(t), j \in J_{\text{оп}}(\tau)), t \in [\tau_0, \tau]$, оценки неопорных векторов условий $d_j(\tau), j \in J_{\text{н}}(\tau): \Delta_j(t | \tau) = u'(t | \tau) d_j(\tau) - c_j(t | \tau), j \in J_{\text{н}}(\tau), t \in [\tau_0, \tau]$, где $d_j(\tau) = D(K, j | \tau), j \in J_{\text{н}}(\tau)$.

4. Если выполняется условие $\Delta_j(t | \tau) \cdot \Delta_j(\tau | \tau) \geq 0, j \in J_{\text{н}}(\tau), t \in [\tau_0, \tau]$, то переходим в 5. В противном случае находим $t_1 = \max \{s \in [\tau_0, \tau] : \Delta_j(s | \tau) = 0, j \in J_{\text{н}}(\tau)\}$ и переходим в 8.

5. Построим псевдоуправление: $\omega_j(t | \tau) = d_{*j}(t)$ при $\Delta_j(t | \tau) > 0$; $\omega_j(t | \tau) = d_j^*(t)$ при $\Delta_j(t | \tau) < 0, j \in J_{\text{н}}(\tau)$; $\omega_{\text{оп}}(t | \tau) = D_{\text{оп}}^{-1}(\tau) \cdot (f(t) - D_{\text{н}}(\tau) \omega_{\text{н}}(t | \tau)), t \in [\tau_0, \tau]$, где $\omega_{\text{оп}}(t | \tau) = (\omega_j(t | \tau), j \in J_{\text{оп}}(\tau)), \omega_{\text{н}}(t | \tau) = (\omega_j(t | \tau), j \in J_{\text{н}}(\tau)), D_{\text{н}}(\tau) = D(K, J_{\text{н}}(\tau) | \tau)$.

6. Если $d_{* \text{оп}}(t) \leq \omega_{\text{оп}}(t | \tau) \leq d_{\text{оп}}^*(t), t \in [\tau_0, \tau]$, то переходим в 9. В противном случае находим $t_2 = \max \{s \in [\tau_0, \tau] : d_{*j}(s) > \omega_j(s | \tau) \text{ или } d_j^*(s) < \omega_j(s | \tau), j \in J_{\text{оп}}(\tau)\}$ и переходим в 7.

7. Псевдоуправление $\omega(t | \tau) = \omega_{\text{оп}}(t | \tau), \omega_{\text{н}}(t | \tau)$ — решение задачи (9) на отрезке $[t_2, \tau]$. Переходим в 2 с $J_{\text{оп}} = J_{\text{оп}}(\tau), \tau = t_2$.

8. Переходим в 5 с $\tau_0 = t_1 - 0$.

9. Псевдоуправление $\omega(t | \tau)$ — решение задачи (9) на отрезке $[\tau_0, \tau]$. Если $\tau_0 = 0$, то переходим в 10. В противном случае переходим в 2 с $J_{\text{оп}} = J_{\text{оп}}(\tau), \tau = \tau_0, \tau_0 = 0$.

10. Решение задачи (9) найдено на всем отрезке T .

Автор выражает глубокую благодарность профессору Р. Габасову за постановку задачи и постоянное внимание.

Список литературы

1. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Конструктивные методы оптимизации. Ч. 2: Задачи управления. Минск, 1984.
2. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Костюкова О. И. Там же. Ч. 3: Сетевые задачи. Минск, 1986.

Поступила в редакцию 29.10.86.

УДК 519.852

Л. А. САВЕЛОВА

МЕТОД РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ С ОДНОСТОРОННИМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Если в задаче линейного программирования нет двусторонних ограничений на переменные, то ее целевая функция может принимать неограниченные значения, а двойственная задача может не иметь планов. Эти обстоятельства усложняют проблему построения адаптивного метода, предложенного в книге Р. Габасова, Ф. М. Кирилловой, А. И. Тятюшкина (Конструктивные методы оптимизации. Ч. 1: Линейные задачи. Минск, 1984). Опишем один из подходов к проблеме.

Рассмотрим нормальную задачу линейного программирования

$$c'x \rightarrow \max, Ax \leq b, x \geq 0, \quad (1)$$

где $A = A(I, J), I = \{1, \dots, m\}, J = \{1, \dots, n\}, m \leq n$. Во множествах I, J выделим подмножества $I_{\text{оп}} \subset I, J_{\text{оп}} \subset J, |I_{\text{оп}}| = |J_{\text{оп}}|$. Совокупность $K_{\text{оп}} =$

$=\{I_{\text{оп}}, J_{\text{оп}}\}$ назовем опорой, а матрицу $A_{\text{оп}}=A(I_{\text{оп}}, J_{\text{оп}})$ — опорной, если выполняется $\det A_{\text{оп}} \neq 0$. Пусть $\{x, K_{\text{оп}}\}$ — опорный план задачи (1). Построим итерацию метода: $\{x, K_{\text{оп}}\} \rightarrow \{\bar{x}, \bar{K}_{\text{оп}}\}$.

Шаг 1. Выберем параметр метода $\varepsilon > 0$ и построим векторы потенциалов $u(I)$, оценок $\Delta(J)$ и невязок $\omega(I)$:

$$u'(I) = u'(I_{\text{оп}}) = c'_{\text{оп}} A_{\text{оп}}^{-1}; \Delta'(J) = u'(I_{\text{оп}}) A(I_{\text{оп}}, J) - c'(J), \omega(I) = b(I) - A(I, J)x(J).$$

Шаг 2. Проверим выполнение соотношений

$$u'_i \geq 0, i \in I_{\text{оп}}; \Delta_j \geq 0, j \in J_{\text{н}} = J \setminus J_{\text{оп}}. \quad (2)$$

Если (2) выполняется, перейдем к шагу 3, иначе — к шагу 4.

Шаг 3. Подсчитаем число

$$\beta = \sum_{\substack{\Delta_j > 0, \\ j \in J_{\text{н}}}} \Delta_j x_j + \sum_{\substack{u'_i > 0, \\ i \in I_{\text{оп}}}} u'_i \omega_i.$$

Если выполняется соотношение

$$\beta \leq \varepsilon, \quad (3)$$

то решение задачи прекращаем на плане $x^* = x$. В противном случае переходим к шагу 4.

Шаг 4. Построим подходящее направление $l = (l_{\text{оп}}, l_{\text{н}})$: $l_j = -x_j$, если $\Delta_j > 0$; $l_j = -\Delta_j$, если $\Delta_j \leq 0$, $j \in J_{\text{н}}$; $l(J_{\text{оп}}) = A_{\text{оп}}^{-1} \eta(I_{\text{оп}}) - A_{\text{оп}}^{-1} A(I_{\text{оп}}, J_{\text{н}}) l(J_{\text{н}})$, где $\eta_i = \omega_i$, если $u'_i > 0$; $\eta_i = u'_i$, если $u'_i \leq 0$, $i \in I_{\text{оп}}$.

Шаг 5. Вычислим максимально допустимый шаг вдоль l : $\theta = \min\{1, \theta_{i_0}, \theta_{j_0}\}$, где $\theta_{i_0} = \min \theta_i$, $i \in I_{\text{н}}$; $\theta_i = \omega_i / a_{(i)} l$, если $a_{(i)} l > 0$; $\theta_i = \infty$, если $a_{(i)} l \leq 0$, $i \in I_{\text{н}}$; $\theta_{j_0} = \min \theta_j$, $j \in J_{\text{оп}}$; $\theta_j = -x_j / l_j$, если $l_j < 0$, $\theta_j = \infty$, если $l_j \geq 0$, $j \in J_{\text{оп}}$.

Шаг 6. Построим новый план $\bar{x} = x + \theta l$. В зависимости от того, на чем реализуется шаг θ , возможны следующие случаи.

1. Если $\theta = 1$ и (2) выполняется, то прекращаем решение на оптимальном плане $x^0 = \bar{x}$;

2. Если $\theta = 1$ и (2) не выполняется, то переходим к шагу 7.

3. Если $\theta < 1$ и (2) выполняется, вычислим число β и проверим соотношение (3). Если (3) выполняется, то решение прекращаем на субоптимальном плане $x^* = \bar{x}$. Иначе — переходим к шагу 8.

4. Если $\theta < 1$ и (2) не выполняется, то переходим к шагу 8.

Шаг 7. Для плана $\bar{x}$ построим направление $\bar{l}$ и вычислим шаг $\bar{\theta} = \min\{\bar{\theta}_{i_0}, \bar{\theta}_{j_0}\}$. При $\bar{\theta} = \infty$ решение прекращаем, так как целевая функция неограниченно возрастает. Если $\bar{\theta} < \infty$, то построим новый план $\tilde{x} = \bar{x} + \bar{\theta} \bar{l}$ и перейдем к шагу 8.

Шаг 8. Вычислим направление изменения коплана $\delta = (\delta(I_{\text{оп}}), \delta(J_{\text{н}}))$:

а) при $\theta = \theta_{i_0}$

$$\delta(I_{\text{оп}}) = -e'_{i_0} A(I_{\text{н}}, J_{\text{оп}}) A_{\text{оп}}^{-1},$$

$$\delta(J_{\text{н}}) = e'_{i_0} (A(I_{\text{н}}, J_{\text{н}}) - A(I_{\text{н}}, J_{\text{оп}}) A_{\text{оп}}^{-1} A(I_{\text{оп}}, J_{\text{н}}));$$

б) при $\theta = \theta_{j_0}$

$$\delta(I_{\text{оп}}) = e'_{j_0} A_{\text{оп}}^{-1}; \delta(J_{\text{н}}) = e'_{j_0} A_{\text{оп}}^{-1} A(I_{\text{оп}}, J_{\text{н}}).$$

Если (2) выполняется, то переходим к шагу 9. Иначе — к шагу 11.

Шаг 9. Вычислим максимально возможный шаг вдоль δ : $\sigma = \min\{\sigma_{i_*}, \sigma_{j_*}\}$, где $\sigma_{i_*} = \min \sigma_i$, $i \in I_{\text{оп}}$; $\sigma_{j_*} = \min \sigma_j$, $j \in J_{\text{н}}$;

$$\sigma_i = \begin{cases} -u_i / \delta_i, & \text{если } u_i \delta_i < 0; \\ 0, & \text{если } u_i = 0, \delta_i < 0; \\ \infty & \text{в остальных случаях, } i \in I_{\text{оп}}; \end{cases} \quad (4)$$

$$\sigma_j = \begin{cases} -\Delta_j/\delta_j, & \text{если } \Delta_j \delta_j < 0; \\ 0, & \text{если } \Delta_j = 0, \delta_j < 0; \\ \infty & \text{в остальных случаях, } j \in J_n. \end{cases} \quad (5)$$

Шаг 10. Построим новые векторы $\bar{u}(I) = u(I) + \sigma \delta(I)$, $\bar{\Delta}(J) = \Delta(J) + \sigma \delta(J)$ и перейдем к шагу 15.

Шаг 11. Вычислим начальную скорость вдоль направления δ :

$$\alpha_0 = \begin{cases} \kappa_{j_0}, & \text{если } \theta = \theta_{j_0}; \\ b_{i_0} - A(i_0, J) \kappa, & \text{если } \theta = \theta_{i_0}, \text{ где } \kappa = x + l. \end{cases}$$

Шаг 12. Подсчитаем числа σ_i , $i \in I_{\text{оп}}$, и σ_j , $j \in J_n$, по формулам (4) — (5) и все конечные из них упорядочим по возрастанию $\sigma_{\bar{j}_1} \leq \sigma_{\bar{j}_2} \leq \dots \leq \sigma_{\bar{j}_r}$, $r \leq n$.

Шаг 13. Если $\delta_{\bar{j}_k} \geq 0$, $\bar{j}_k \in (I_{\text{оп}}, J_n)$, то вычислим

$$\Delta \alpha_k = \begin{cases} \delta_{\bar{j}_k} \kappa_{\bar{j}_k}, & \text{если } \bar{j}_k \in J_n; \\ \delta_{\bar{j}_k} (A(\bar{j}_k, J) \kappa - b_{\bar{j}_k}), & \text{если } \bar{j}_k \in I_{\text{оп}}. \end{cases}$$

Если тогда $\alpha_0 + \sum_{i=1}^p \Delta \alpha_i \geq 0$, то положим $\sigma = \sigma_{\bar{j}_p} = \sigma_{\bar{j}_*}$ и перейдем к шагу 10.

Шаг 14. Если $\delta_{\bar{j}_k} < 0$, $\bar{j}_k \in (I_{\text{оп}}, J_n)$, то положим $\sigma = \sigma_{\bar{j}_k} = \sigma_{\bar{j}_*}$ и перейдем к шагу 10.

Шаг 15. Заменяем опору $K_{\text{оп}}$ на $\bar{K}_{\text{оп}} = \{\bar{I}_{\text{оп}}, \bar{J}_{\text{оп}}\}$, где

1) $\bar{I}_{\text{оп}} = I_{\text{оп}}$, $\bar{J}_{\text{оп}} = (J_{\text{оп}} \setminus j_0) \cup \bar{j}_*$, если $\theta = \theta_{j_0}$, $\bar{j}_* \in J_n$;

2) $\bar{I}_{\text{оп}} = I_{\text{оп}} \setminus \bar{j}_*$, $\bar{J}_{\text{оп}} = J_{\text{оп}} \setminus j_0$, если $\theta = \theta_{j_0}$, $\bar{j}_* \in I_{\text{оп}}$;

3) $\bar{I}_{\text{оп}} = I_{\text{оп}} \cup i_0$, $\bar{J}_{\text{оп}} = J_{\text{оп}} \cup \bar{j}_*$, если $\theta = \theta_{i_0}$, $\bar{j}_* \in J_n$;

4) $\bar{I}_{\text{оп}} = (I_{\text{оп}} \setminus \bar{j}_*) \cup i_0$, $\bar{J}_{\text{оп}} = J_{\text{оп}}$, если $\theta = \theta_{i_0}$, $\bar{j}_* \in I_{\text{оп}}$,

и перейдем к шагу 2.

Поступила в редакцию 20.11.86.

УДК 539.3

И. А. ЕГОРЕНКОВ, И. А. ПРУСОВ

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ УПРУГИХ ХАРАКТЕРИСТИК АНИЗОТРОПНЫХ ШПАНГОУТОВ

Применяемые в современной технике шпангоуты во многих случаях в пределах допускаемой нагрузки можно рассматривать как упругое тело, обладающее цилиндрической анизотропией. Если внешняя нагрузка такая, что напряжениями σ_z , τ_{rz} , $\tau_{\theta z}$, отнесенными к цилиндрическим координатам r , θ , z (см. рисунок), можно пренебречь, для решения задач по определению НДС шпангоута необходимо знать его упругие характеристики [1]:

$$a_{11} = 1/E_r, \quad a_{22} = 1/E_\theta, \quad a_{12} = -\nu_1/E_\theta = -\nu_2/E_r. \quad (1)$$

Наиболее достоверную информацию о значениях величин (1) можно получить путем экспериментов со сплошным шпангоутом. В нашей работе выведены три уравнения, используя которые можно найти значения величин a_{ij} по данным эксперимента для радиальных смещений точек на