3. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Костюкова О. И. // Автоматика и телемеханика. 1984. № 2. С. 6.

4. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Принцип максимума в теории оптимального управления. Минск, 1974.

Поступила в редакцию 20.11.86.

УДК 517.948.32:517.544

О. ДЖУРАЕВ

ПОСТРОЕНИЕ УРАВНЕНИЯ РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ, ЗАДАННОЙ В ВИДЕ ТРЕХЛИСТНОЙ ПОВЕРХНОСТИ НАЛОЖЕНИЯ СФЕРЫ

Пусть R — замкнутая риманова поверхность, реализованная в виде трехлистной поверхности наложения сферы $\hat{S}$. Предположим, что заданы точки ветвления $z_1 = -1$, $z_2 = -\frac{1}{k}$, $z_3 = \frac{1}{k}$, $z_4 = 1$ ($k > 1$) и образующие группы монодромии поверхности

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Требуется построить поле алгебраических функций, соответствующее данному накрытию сферы.

Нетрудно проверить, что $\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3 \circ \sigma_4 = 1$ и род поверхности R равен нулю. Следовательно, на ней существует всюду мероморфная функция с единственным простым полюсом [1]. Данная задача эквивалентна следующей векторно-матричной задаче Римана [2].

Найти все вектор-функции, аналитические вне контура $(-1, -1/k) \cup (1/k, 1)$ и ограниченные на его концах, по краевому условию:

$$\begin{vmatrix} \omega_1^+(t) \\ \omega_2^+(t) \\ \omega_3^+(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \omega_1^-(t) \\ \omega_2^-(t) \\ \omega_3^-(t) \end{vmatrix}, \quad t \in (-1, -1/k),$$

$$\begin{vmatrix} \omega_1^+(t) \\ \omega_2^+(t) \\ \omega_3^+(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \omega_1^-(t) \\ \omega_2^-(t) \\ \omega_3^-(t) \end{vmatrix}, \quad t \in (1/k, 1).$$

На бесконечности решение допускает следующую асимптотику: $\omega_1(z) \sim 3z$, $\omega_2(z) \sim c_1$, $\omega_3(z) \sim c_2$, $c_1, c_2 = \text{const}$ (при $z \rightarrow \infty$).

Прежде всего отметим, что если $\omega(z)$ такое решение задачи (1), при котором пара (z, ω) порождает искомого поле алгебраических функций (т. е. (z, ω) составляют примитивную пару), то они связаны неприводимым алгебраическим уравнением вида [2, 3]:

$$f(z, \omega) = \omega^3 + a_1(z)\omega^2 + a_2(z)\omega + a_3(z) = 0. \quad (2)$$

Задача (1) будет решена, если построить каноническую матрицу решений задачи или нормальный базис поля алгебраических функций, заданного уравнением (2).

Пусть $\alpha = \exp \frac{2\pi i}{3}$. Тогда, применяя преобразования [4]

$$S = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{vmatrix} \alpha^2 & \alpha & 1 \\ \alpha & \alpha^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad S^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{vmatrix} \alpha & \alpha^2 & 1 \\ \alpha^2 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

к системе (1), получаем:

$$\left\| \begin{array}{c} \psi_1^+(t) \\ \psi_2^+(t) \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} \psi_1^-(t) \\ \psi_2^-(t) \end{array} \right\|, \quad t \in (-1, -1/k), \quad (3)$$

$$\left\| \begin{array}{c} \psi_1^+(t) \\ \psi_2^+(t) \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} 0 & \alpha \\ \alpha^2 & 0 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} \psi_1^-(t) \\ \psi_2^-(t) \end{array} \right\|, \quad t \in (1/k, 1),$$

$$\psi_3^+(t) = \psi_3^-(t), \quad t \in (-1, -1/k) \cup (1/k, 1), \quad (3a)$$

где $\psi(z) = S \circ \omega(z)$.

Для решения задачи (3) построим риманову поверхность R^* , образованную склеиванием двух экземпляров $\hat{C}$ вдоль разрезов $(-1, -1/k)$ и $(1/k, 1)$ по закону подстановок $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Уравнение поверхности R^* имеет вид: $u^{*2} = (1-z^2)(1-k^2z^2)$, а ее род равен $\rho^* = 1$. Далее, полагая

$$F^+(t, v^*) = \begin{cases} \psi_1^+(t, v^*), & (t, v^*) \in L_1, \\ \psi_1^-(t, v^*), & (t, v^*) \in L_2, \end{cases}$$

$$F^-(t, v^*) = \begin{cases} \psi_2^-(t, v^*), & (t, v^*) \in L_1, \\ \psi_2^+(t, v^*), & (t, v^*) \in L_2, \end{cases}$$

$$G(t, v^*) = \alpha, \quad (t, v^*) \in L_1 \cup L_2,$$

сведем задачу (3) к однородной задаче Римана на R^* [5].

$$F^+(t, v^*) = \alpha F^-(t, v^*), \quad (\infty, \pm\infty)^{-1} | (F), \quad (t, v^*) \in L_1 \cup L_2, \quad (4)$$

где L_1 и L_2 — соответственно верхний и нижний берега разреза $(1/k, 1)$ и

$$v^{*2} = (1-t^2)(1-k^2t^2).$$

Поскольку индекс коэффициента задачи (4) равен нулю, то $l-l' = x+m+n-\rho^*+1=2$ и $l=2$, т. е. задача имеет два линейно независимых решения [5]. Общее решение задачи (4) строится по формуле:

$$F(z, u^*) = \varphi(z, u^*) \cdot X(z, u^*), \quad (5)$$

$$\text{где } X(z, u^*) = \exp \left[\frac{1}{2\pi i} \int_L \ln G(t, v^*) d\hat{\omega} - \int_{(0, L)}^{(z_0, u_0^*)} d\hat{\omega} - 2\pi i m \int_{(0, 1)}^{(z, u_0^*)} \frac{dt}{v^*} \right]$$

и $d\hat{\omega} = \frac{u^* + v^*}{2v^*} \cdot \frac{dt}{t-z}$ — аналог ядра Коши на R^* .

Точки z_0, u_0^* и число m находим из следующей проблемы обращения Якоби:

$$\int_{(0, 1)}^{(z_0, u_0^*)} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = -\frac{2}{3} iK' - 2iK'm - 4Kn,$$

где K, K' — полные эллиптические интегралы первого рода в форме Лежандра. Решая проблему обращения, находим, что $m=0, n=0, z_0 = -\operatorname{sn}\left(\frac{2}{3}iK'\right), u_0^* = \operatorname{cn}\left(\frac{2}{3}iK'\right) \cdot \operatorname{dn}\left(\frac{2}{3}iK'\right)$. Здесь $\operatorname{sn}(\cdot), \operatorname{cn}(\cdot), \operatorname{dn}(\cdot)$ — эллиптические функции Якоби. Подставляя найденные значения в формулу (5), после несложных преобразований получаем:

$$F(z, u^*) = \varphi(z, u^*) \cdot \sqrt[3]{\frac{k(1-z)}{1-kz}} \cdot \sqrt{\frac{z}{z-z_0}} \times$$

$$\times \exp \left[-u^* \left(\frac{1}{3} \int_1^{1/k} \frac{dt}{(t-z)v^*} + \frac{1}{2} \int_{(0, 1)}^{(z_0, u_0^*)} \frac{dt}{(t-z)v^*} \right) \right]; \quad (6)$$

$\varphi(z, u^*)$ является всюду мероморфной функцией, кратной дивизору $Q^{-1} = (z_0, u_0^*) \cdot (0, 1)^{-1} \cdot (\infty, +\infty)^{-1} \cdot (\infty, -\infty)^{-1}$, и представима в виде: $\varphi(z, u^*) = \frac{az^2 + bz + c + d \cdot u^*}{z}$. Пользуясь условием кратности $\varphi(z, u^*)$

заданному дивизору Q^{-1} , получаем: $\varphi(z, u^*) = (1 + z) \cdot b + \frac{1 - z^2 + u^*}{z} \cdot d$.

Линейно независимые функции $\varphi_1(z) = 1 + z$ и $\varphi_2(z, u^*) = \frac{1 - z^2 + u^*}{z}$ составляют нормальный базис пространства рациональных функций, кратных дивизору Q^{-1} , и $\text{ord } \varphi_1(z) = \text{ord } \varphi_2(z, u^*) = 1$. Заменяя в (6) $\varphi(z, u^*)$ линейной комбинацией функций базиса и выделяя однозначные ветви решения в формуле (5), получаем каноническую матрицу решений задачи (3) [6, 7]:

$$\chi(z, u^*) = \begin{pmatrix} (1 + z) \cdot X(z, u^*) \frac{1 - z^2 + u^*}{z} \cdot X(z, u^*) \\ (1 + z) \cdot X(z, -u^*) \frac{1 - z^2 - u^*}{z} \cdot X(z, -u^*) \end{pmatrix}.$$

Общее решение задачи (3), (3a) записывается в виде:

$$\begin{pmatrix} \Psi_1(z) \\ \Psi_2(z) \\ \Psi_3(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 + z) \cdot X(z, u^*) \frac{1 - z^2 + u^*}{z} \cdot X(z, u^*) & 0 \\ (1 + z) \cdot X(z, -u^*) \frac{1 - z^2 - u^*}{z} \cdot X(z, -u^*) & 0 \\ 0 & \sqrt{3z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $\Psi_1(z) = \left[(1 + z) d_1 + \frac{1 - z^2 + u^*}{z} \cdot d_2 \right] \cdot X(z, u^*)$,

$\Psi_2(z) = \left[(1 + z) d_1 + \frac{1 - z^2 - u^*}{z} \cdot d_2 \right] \cdot X(z, -u^*)$,

$\Psi_3(z) = \sqrt{3z}$, $d_1, d_2 \neq 0$.

Учитывая подстановку $\psi(z) = S \circ \omega(z)$, имеем

$\omega_1(z) = \frac{1}{\sqrt{3}} [\alpha \varphi_1(z) + \alpha^2 \varphi_2(z) + \varphi_3(z)]$,

$\omega_2(z) = \frac{1}{\sqrt{3}} [\alpha^2 \varphi_1(z) + \alpha \varphi_2(z) + \varphi_3(z)]$,

$\omega_3(z) = \frac{1}{\sqrt{3}} [\varphi_1(z) + \varphi_2(z) + \varphi_3(z)]$.

Теперь выделим то единственное решение, которое на бесконечности имеет асимптотку: $\omega_1(z) \sim 3z$, $\omega_2(z) \sim c_1$, $\omega_3(z) \sim c_2$. Имеем:

$$\begin{cases} [(\alpha + \alpha^2) d_1 + (k\alpha - k\alpha^2 + 1) d_2 + \sqrt{3}] z + (\alpha + \alpha^2) d_1 = 3\sqrt{3} z, \\ [\alpha + \alpha^2] d_1 + (k\alpha^2 - k\alpha + 1) d_2 + \sqrt{3}] z + (\alpha + \alpha^2) d_1 = \sqrt{3} c_1, \\ (2d_1 - 2d_2 + \sqrt{3}) z + 2d_1 = \sqrt{3} c_2. \end{cases}$$

Сравнивая в этих равенствах коэффициенты при одинаковых степенях z , получаем систему линейных уравнений, решив которую, находим: $d_1 = -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}}{2k} - i \frac{3}{2k}$, $d_2 = -i \frac{3}{2k}$, $c_1 = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2k}$, $c_2 = -1 - i \frac{\sqrt{3}}{k}$. По формулам Виета находим выражения для коэффициентов искомого уравнения (2): $a_1(z) = -(\omega_1^0 + \omega_2^0 + \omega_3^0) = -\left(3z + \frac{k - i\sqrt{3}}{2k} \right)$, $a_2(z) = \omega_1^0 \cdot \omega_2^0 + \omega_1^0 \cdot \omega_3^0 + \omega_2^0 \cdot \omega_3^0 = -\left(\frac{3k + i3\sqrt{3}}{2k} z + \frac{k^2 - 3 + 2i\sqrt{3}}{2k^2} \right)$, $a_3(z) = -(\omega_1^0 \cdot \omega_2^0 \cdot \omega_3^0) = \frac{3k^2 - 9 + 2i\sqrt{3}}{2k^3} z$. Здесь $\omega_1^0(z)$, $\omega_2^0(z)$, $\omega_3^0(z)$ — решение (1) при $z \rightarrow \infty$. Таким образом,

$$f(z, w) = w^3 - \left(3z + \frac{k - i\sqrt{3}}{2k}\right)w^2 - \left(\frac{3k + i3\sqrt{3}}{2k}z + \frac{k^2 - 3 + 2i\sqrt{3}}{2k^2}\right)w + \frac{3k^2 - 9 + 2i\sqrt{3}}{2k^2}z = 0. \quad (7)$$

Легко проверить, что уравнение (7) неприводимо. Следовательно, пара (z, w) , связанная уравнением (7), порождает искомое поле алгебраических функций [2].

Список литературы

1. Форстер О. Римановы поверхности. М., 1980. С. 247.
2. Чеботарев Н. Г. Теория алгебраических функций. М.; Л., 1948. С. 396.
3. Зверович Э. И. // Докл. АН БССР. 1985. Т. 29. № 2. С. 104.
4. Круглов В. Е. Сибирск. матем. журн. 1982. Т. 22. № 6. С. 87.
5. Зверович Э. И. // УМН. 1971. Т. 26. № 1. С. 113.
6. Зверович Э. И., Померанцева А. И. // Докл. АН СССР. 1974. Т. 217. № 1. С. 20.
7. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., 1968. С. 511.

Поступила в редакцию 26.11.86.