УДК 517.977.58

ЧХЕ ХЕН ИР

# КРИТЕРИИ ОПТИМАЛЬНОСТИ И СУБОПТИМАЛЬНОСТИ В ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ИЗМЕНЯЕМЫМ МНОЖЕСТВОМ УПРАВЛЕНИЙ

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим задачу оптимального управления динамической системой с изменяемым множеством допустимых значений управлений:

$$\begin{gathered} J(u,\ v)=c_x'x(t^*)+c_v'v\to\max, \\ \dot{x}=Ax+Bu,\ x(0)=x_0, \\ u(t)\in U(v),\ \ t\in T=[0,\ t^*],\ b_*\leqslant v\leqslant b^*. \end{gathered} \tag{1}$$

Здесь $T$ — заданный промежуток времени; $0$, $t^*$ — начальный и конечный моменты процесса управления; $x=x(t)$ — $n$-вектор состояния динамической системы в момент $t$; $u=u(t)$ — $r$-вектор управляющих воздействий; $v$ — вектор управляющих параметров; $A$, $B$ — матрицы соответствующих размеров, характеризующие свойства объекта управления и входного устройства; $c_x$, $c_v$ — $n$, $q$—векторы параметров критерия качества.

Будем считать, что $U(v)$ — многогранное множество:

$$U(v)=\{u\in R^r: Du+Gv=f,\ d_*\leqslant u\leqslant d^*\}. \tag{2}$$

$D(K,\ J)$, $G=G(K,\ L)$ — $k\times r$, $k\times q$-матрицы; $f$, $d_*$, $d^*$, $b_*$, $b^*$ — векторы соответствующих размеров.

Управляющие воздействия $u(t)$, $t\in T$, будут выбираться из класса импульсных функций с постоянным периодом квантования.

Пару $w=(u,\ v)$ из управляющего воздействия $u=(u(t),\ t\in T)$ и вектора управляющих параметров $v$ назовем управлением. Допустимым управлением назовем управление $w$, которое принимает значения из множества:

$$W=\{w=(u,\ v): u\in U(v),\ b_*\leqslant v\leqslant b^*\}. \tag{3}$$

Оптимальными будем называть допустимое управление $w^0$ и траекторию $x^0$, на которых критерий качества $J(w)$ задачи (1) достигает максимального значения: $J(w^0)=\max\limits_{w\in W} J(w)$.

Субоптимальным ($\varepsilon$-оптимальным) назовем допустимое управление $w^\varepsilon=(u^\varepsilon,\ v^\varepsilon)$, которое при заданном $\varepsilon\geqslant 0$ удовлетворяет неравенству $J(w^0)-J(w^\varepsilon)\leqslant\varepsilon$. Задача заключается в том, чтобы построить оптимальное и субоптимальное управления $w^0$, $w^\varepsilon$.

**2. Опорное управление.** Воспользовавшись формулой Коши, (1) перепишем в следующем виде:

$$\begin{gathered} J(u,\ v)=\sum_{t\in T_g} c_x'A^{t^*-t/h-1}Bu(t)+c_v'v\to\max, \\ Du(t)+Gv=f, \\ d_*\leqslant u(t)\leqslant d^*,\ \ t\in T_g=\{0,\ h,\ \ldots,\ t^*-h\},\ b_*\leqslant v\leqslant b^*. \end{gathered} \tag{4}$$

Допустимые приращения $\Delta u(t)=\bar{u}(t)-u(t)$, $t\in T$; $\Delta v=\bar{v}-v$ удовлетворяют уравнению

$$D\Delta u(t)+G\Delta v=0,\ \ t\in T. \tag{5}$$

Пусть $L^v_{\text{оп}}$ — некоторое подмножество множества $L$. Из множества $T_g$ выберем конечное подмножество точек $T^{uv}_{\text{оп}}=\{\tau^{uv}_1,\ \tau^{uv}_2,\ \ldots,\ \tau^{uv}_p\}$. Каждому моменту времени $t\in T^{uv}_{\text{оп}}$ припишем множество $J^{uv}_{\text{оп}}(t)\subset J$. Обозначим: $J^{uv}_{\text{оп}}=\{J^{uv}_{\text{оп}}(t),\ t\in T^{uv}_{\text{оп}}\}$, $J^{uv}_{\text{н}}(t)=J\setminus J^{uv}_{\text{оп}}(t)$.

Составим матрицу

$$Q_{\text{оп}} = \begin{pmatrix} D(K, J^{uv}_{\text{оп}}(\tau^{uv}_1)) & 0 & \dots & 0 & G(K, L^v_{\text{оп}}) \\ 0 & D(K, J^{uv}_{\text{оп}}(\tau^{uv}_2)) & \dots & 0 & G(K, L^v_{\text{оп}}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & D(K, J^{uv}_{\text{оп}}(\tau^{uv}_p)) & G(K, L^v_{\text{оп}}) \end{pmatrix}$$

Обозначим: $L^{uv} = \{J^{uv}_{\text{оп}}, L^v_{\text{оп}}\}$.

*Определение. 1.* Совокупность $Q^{uv}_{\text{оп}} = \{L^{uv}; T^{uv}_{\text{оп}}\}$ назовем совместной опорой, если $\det Q_{\text{оп}} \neq 0$.

Используя совместную опору, из (5) находим

$$\begin{pmatrix} \Delta u_{J^{uv}_{\text{оп}}(t)}(t) \\ t \in T^{uv}_{\text{оп}} \\ \Delta v_{\text{оп}} \end{pmatrix} = -Q^{-1}_{\text{оп}} Q_{\text{н}} \begin{pmatrix} \Delta u_{J^{uv}_{\text{н}}(t)}(t) \\ t \in T^{uv}_{\text{оп}} \\ \Delta v_{\text{н}} \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где $$Q_{\text{н}} = \begin{pmatrix} D(K, J^{uv}_{\text{н}}(\tau^{uv}_1)) & 0 & \dots & 0 & G(K, L^v_{\text{н}}) \\ 0 & D(K, J^{uv}_{\text{н}}(\tau^{uv}_2)) & \dots & 0 & G(K, L^v_{\text{н}}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & D(K, J^{uv}_{\text{н}}(\tau^{uv}_p)) & G(K, L^v_{\text{н}}) \end{pmatrix}$$

Из множества $T^{uv}_{\text{н}} = T_g \setminus T^{uv}_{\text{оп}}$ выберем некоторое подмножество $T^u_{\text{оп}} = \{\tau^u_1, \tau^u_2, \dots, \tau^u_q\}$. Каждому $t \in T^u_{\text{оп}}$ припишем множество $J^u_{\text{оп}}(t) \subset J$, $|J^u_{\text{оп}}(t)| = |K|$, $t \in T^u_{\text{оп}}$. Обозначим: $J^u_{\text{оп}} = \{J^u_{\text{оп}}(t), t \in T^u_{\text{оп}}\}$, $J^u_{\text{н}}(t) = J \setminus J^u_{\text{оп}}(t)$, $t \in T^u_{\text{оп}}$.

*Определение 2.* Назовем $J^u_{\text{оп}}(t)$ локальной опорой в момент $t$, совокупность $Q^u_{\text{оп}} = \{T^u_{\text{оп}}; J^u_{\text{оп}}\}$ — локальной опорой, если $\det D(K, J^u_{\text{оп}}(t)) \neq 0$, $t \in T^u_{\text{оп}}$.

*Определение 3.* Совокупность $Q_{\text{оп}} = \{Q^{uv}_{\text{оп}}; Q^u_{\text{оп}}\}$ из совместной и локальной опор назовем опорой задачи.

*Определение 4.* Пару $\{w, O_{\text{оп}}\}$ из допустимого управления и опоры задачи назовем опорным управлением.

*Определение 5.* Опорное управление $\{w, O_{\text{оп}}\}$ называется невырожденным, если все опорные компоненты управления являются некритическими.

Используя локальную опору, из (5) найдем

$$\Delta u_{J^u_{\text{оп}}(t)}(t) = D^{-1}(K, J^u_{\text{оп}}(t))\,(-D(K, J^u_{\text{н}}(t))\,\Delta u_{J^u_{\text{н}}(t)}(t) - G\Delta v), \quad t \in T^u_{\text{оп}}; \tag{7}$$

$$\Delta u_{J^u_{\text{оп}}(\tau^u_k)}(t) = D^{-1}(K, J^u_{\text{оп}}(\tau^u_k))\,(-D(K, J^u_{\text{н}}(\tau^u_k))\,\Delta u_{J^u_{\text{н}}(\tau^u_k)}(t) -$$
$$- G\Delta v), \; t \in T_k \setminus T^{uv}_{\text{оп}} = T^k; \; T_k = T \cap ]\tau_{k-1}, \tau_k], \; k = \overline{1, q}. \tag{8}$$

**3. Критерии оптимальности и субоптимальности.** Приращение критерия качества равно:

$$\Delta J(u, v) = \sum_{t \in T_g} c'_x A^{t^*-t/h-1} B \Delta u(t) + c'_v \Delta v. \tag{9}$$

Введем обозначения:

$$Q^{-1}_{\text{оп}} = \begin{vmatrix} Q_1(\tau^{uv}_1) & Q_1(\tau^{uv}_2) & \dots & Q_1(\tau^{uv}_p) \\ Q_2(\tau^{uv}_1) & Q_2(\tau^{vv}_2) & \dots & Q_2(\tau^{uv}_p) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_p(\tau^{uv}_1) & Q_p(\tau^{uu}_2) & \dots & Q_p(\tau^{uv}_p) \\ Q^v(\tau^{uv}_1) & Q^v(\tau^{uv}_2) & \dots & Q^v(\tau^{uv}_p) \end{vmatrix},$$

$$-\omega'(t)=\psi'(t)B(I,\ J^u_{\text{оп}}(\tau^u_k))D^{-1}(K,\ J^u_{\text{оп}}(\tau^u_k)),\ t\in]\tau^u_{k-1},\ \tau^u_k]\setminus T^{uv}_{\text{оп}},\ k=\overline{1,q},$$
$$q=|T^u_{\text{оп}}|;$$
$$-\omega'(t)=\sum_{i=1}^{p}\psi'(\tau^{uv}_i)B(I,\ J^{uv}_{\text{оп}}(\tau^{uv}_i))Q_i(t)+$$
$$+[c_{\text{оп}}+\sum_{k\in Q}\sum_{\tau\in T^k}\omega(\tau)]'G(K,\ L^v_{\text{оп}})Q^v(t),\ t\in T^{uv}_{\text{оп}};\tag{10}$$
$$-\Delta'_{\text{н}}(t)=\psi'(t)B(I,\ J^u_{\text{н}}(\tau^u_k))+\omega'(t)D(K,\ J^u_{\text{н}}(\tau^u_k)),\ t\in T^k,\ k=\overline{1,q};$$
$$-\Delta^{u'}_{\text{н}}(t)=\psi'(t)B(I,\ J^{uv}_{\text{н}}(t))+\omega'(t)D(K,\ J^{uv}_{\text{н}}(t)),\ t\in T^{uv}_{\text{оп}};$$
$$-\Delta^{v'}_{\text{н}}=\Big(\sum_{t\in T^{uv}_{\text{оп}}}\omega'(t)+\sum_{t\in T_g\setminus T^{uv}_{\text{оп}}}\omega(t)\Big)'G(K,\ L^v_{\text{н}})+c'_{v\text{н}},$$

где $\psi(t),\ t\in T_g$ — решение сопряженной системы

$$\psi(t-h)=A'\psi(t),\ t\in T_g,\tag{11}$$

с начальным условием $\psi(t^*-h)=c_x$.

Из (9) исключим опорные компоненты управляющего воздействия $u(t),\ t\in T$ и вектора $v$, пользуясь формулами (6), (7), (8) и обозначениями (10):

$$\Delta J(u,\ v)=-\sum_{k\in Q}\sum_{t\in T^k}\Delta'_{\text{н}}(t)\,\Delta u_{J^u_{\text{н}}(\tau^u_k)}(t)-$$
$$-\sum_{t\in T^{uv}_{\text{оп}}}\Delta^{u'}_{\text{н}}(t)\,\Delta u_{J^{uv}_{\text{н}}(t)}(t)-\Delta^{v'}_{\text{н}}\Delta v_{\text{н}}.\tag{12}$$

**Теорема 1.** Для оптимальности опорного управления $\{w,\ O_{\text{оп}}\}$ достаточно, а в случае невырожденности и необходимо, чтобы вдоль траектории $\psi(t),\ t\in T_g$ сопряженной системы (11) и функции $\omega(t),\ t\in T_g$, (10) выполнялись:

1) условие максимума для управляющего воздействия
$$(\psi'(t)B+\omega'(t)D)u(t)=\max_{d_*\leqslant y\leqslant d^*}(\psi'(t)B+\omega'(t)D)y,\ t\in T_g;$$

2) условие максимума для вектора управляющих параметров
$$\Big(\sum_{t\in T_g}\omega'(t)G+c'_v\Big)v=\max_{b_*\leqslant z\leqslant b^*}\Big(\sum_{t\in T_g}\omega'(t)G+c'_v\Big)z.$$

**Теорема 2.** Для $\varepsilon$-оптимальности допустимого управления $w=(u,\ v)$ необходимо и достаточно, чтобы при некоторой опоре $O_{\text{оп}}$ вдоль траектории $\psi(t),\ t\in T_g$ сопряженной системы (11) и функции $\omega(t),\ t\in T_g$, (10) выполнялись условия:

1) $(\psi'(t)B+\omega'(t)D)u(t)=\max\limits_{d_*\leqslant y\leqslant d^*}(\psi'(t)B+\omega'(t)D)y-\varepsilon^u(t),\ t\in T_g,$

2) $\Big(\sum\limits_{t\in T_g}\omega'(t)G+c'_vv\Big)=\max\limits_{b_*\leqslant z\leqslant b^*}\Big(\sum\limits_{t\in T_g}\omega'(t)G+c'_v\Big)z-\varepsilon^v,$

3) $\sum\limits_{t\in T_g}\varepsilon^u(t)+\varepsilon^v\leqslant\varepsilon.$

Автор выражает искреннюю благодарность профессору Р. Ф. Габасову за внимание к работе.

### Список литературы

1. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Тятюшкин А. И. Конструктивные методы оптимизации. Ч. 1: Линейные задачи. Минск, 1984.

2. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Там же. Ч. 2: Задачи управления. Минск, 1984.

3. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Костюкова О. И. // Автоматика и телемеханика. 1984. № 2. С. 6.
4. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Принцип максимума в теории оптимального управления. Минск, 1974.

Поступила в редакцию 20.11.86.

*УДК 517.948.32:517.544*

*О. ДЖУРАЕВ*

# ПОСТРОЕНИЕ УРАВНЕНИЯ РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ, ЗАДАННОЙ В ВИДЕ ТРЕХЛИСТНОЙ ПОВЕРХНОСТИ НАЛОЖЕНИЯ СФЕРЫ

Пусть $R$ — замкнутая риманова поверхность, реализованная в виде трехлистной поверхности наложения сферы $\hat{C}$. Предположим, что заданы точки ветвления $z_1=-1$, $z_2=-\frac{1}{k}$, $z_3=\frac{1}{k}$, $z_4=1$ $(k>1)$ и образующие группы монодромии поверхности

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix},\quad \sigma_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix},\quad \sigma_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},\quad \sigma_4=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}.$$

Требуется построить поле алгебраических функций, соответствующее заданному накрытию сферы.

Нетрудно проверить, что $\sigma_1\circ\sigma_2\circ\sigma_3\circ\sigma_4=1$ и род поверхности $R$ равен нулю. Следовательно, на ней существует всюду мероморфная функция с единственным простым полюсом [1]. Данная задача эквивалентна следующей векторно-матричной задаче Римана [2].

Найти все вектор-функции, аналитические вне контура $(-1,\ -1/k)\cup\cup(1/k,\ 1)$ и ограниченные на его концах, по краевому условию:

$$\begin{Vmatrix}w_1^+(t)\\w_2^+(t)\\w_3^+(t)\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}w_1^-(t)\\w_2^-(t)\\w_3^-(t)\end{Vmatrix},\ t\in(-1,\ -1/k),$$
$$\begin{Vmatrix}w_1^+(t)\\w_2^+(t)\\w_3^+(t)\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}w_1^-(t)\\w_2^-(t)\\w_3^-(t)\end{Vmatrix},\ t\in(1/k,\ 1). \qquad (1)$$

На бесконечности решение допускает следующую асимптотику: $w_1(z)\sim 3z$, $w_2(z)\sim c_1$, $w_3(z)\sim c_2$, $c_1$, $c_2=\text{const}$ (при $z\to\infty$).

Прежде всего отметим, что если $w(z)$ такое решение задачи (1), при котором пара $(z,\ w)$ порождает искомое поле алгебраических функций (т. е. $(z,\ w)$ составляют примитивную пару), то они связаны неприводимым алгебраическим уравнением вида [2, 3]:

$$f(z,\ w)=w^3+a_1(z)w^2+a_2(z)w+a_3(z)=0. \qquad (2)$$

Задача (1) будет решена, если построить каноническую матрицу решений задачи или нормальный базис поля алгебраических функций, заданного уравнением (2).

Пусть $\alpha=\exp\frac{2\pi i}{3}$. Тогда, применяя преобразования [4]

$$S=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{Vmatrix}\alpha^2&\alpha&1\\\alpha&\alpha^2&1\\1&1&1\end{Vmatrix},\quad S^{-1}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{Vmatrix}\alpha&\alpha^2&1\\\alpha^2&\alpha&1\\1&1&1\end{Vmatrix}$$