Нетрудно показать, что трудоемкость построения таблицы P_j оценивается величиной $O(n^4)$.

Часто (например, при решении потоковых задач) требуется найти ПП из s в t, начиная с вершины s. В этом случае таблицы P_j преобразуются в таблицу P, содержащую сведения о всех ПП из s в t графа G. В таблице P размерности $(n-1)\times K$ каждая l-я строка соответствует вершине $x_l \in X$ $(x_l \neq t)$, а номер k-го столбца — длине ПП из s, включающего дугу, инцидентную вершине x_l, в качестве последней. Элемент (l, k) таблицы P представлен списком S'_{lk} вершин $x_r \in X_k$ таблиц P_j, которым предшествует вершина x_l в ПП из s в x_r длины k. Если дуга (x_l, x_r) не является k-й дугой хотя бы одного ПП из s в t, то $x_r \notin S'_{lk}$. Для каждой вершины $x_r \in S'_{lk}$ определена метка M_r. Номер j вершины $x_j \in \Gamma(s)$ заносится в метку M_r только в том случае, если существует ПП из s в t, проходящий через эту вершину x_j, k-й вершиной которого является вершина x_r.

Назовем Π_{st}-подграфом подграф, построенный на множестве всех ПП из s в t графа G.

Построим по таблице P неориентированный граф $G^* = (X^*, A^*)$, придерживаясь следующей процедуры.

Ребра графа G^* находятся просмотром списков S'_{lk} столбцов таблицы P. Пусть просмотрен k-й столбец. Просмотр $k+1$-го столбца состоит в следующем. К вершине x_l присоединяем ребро (x_l, x_p), если $x_p \in S'_{l(k+1)}$ и это ребро еще не вошло в множество A^*. Граф G^* построен, если просмотрен последний столбец таблицы P.

Утверждение 2. Граф G^* является Π_{st}-подграфом графа G.

Доказательство. Пусть ребро $(x_l, x_p) \in A$ не вошло в граф G^*. Из способа организации таблицы P и процедуры построения графа G^* вытекает, что в этом случае $x_l \notin S_{pk}$ и $x_p \notin S_{lk}$ для любой таблицы P_j при всех $k=1, \ldots, k_j$. Тогда из доказательства утверждения 1 следует, что в графе G нет ни одного ПП из s в t, содержащего либо дугу (x_l, x_p), либо (x_p, x_l). Утверждение доказано.

Процедура нахождения по таблице P ПП из s в t, проходящего через данную вершину $x_j \in \Gamma(s)$, состоит в следующем. Включаем в путь вершину s. Пусть найдено k вершин $s, x_i, \ldots, x_p$ (где $x_p \neq t$), метка каждой из которых содержит значение j. Для определения $k+1$-й вершины ПП просматриваем список $S'_{p(k+1)}$ и включаем в путь вершину $x_r \in S'_{p(k+1)}$, для которой $j \in M_r$. Путь построен, если в него включена вершина t.

Обоснование процедуры следует из способа организации таблицы P и утверждения 2.

Список литературы

1. Shier D. // Networks. 1976. N. 6. P. 205.
2. Рейнгольд Э., Нивергельт Ю., Део Н. Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика. М., 1980.

Поступила в редакцию 26.06.86.

УДК 517.9:535.4

Памяти А. М. Родова

В. Т. ЕРОФЕЕНКО

ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛОВ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

В предлагаемой работе выводятся некоторые теоремы сложения для потенциалов Дебая и векторов Герца в сферических, цилиндрических и декартовых координатах.

Определим электромагнитное поле (ЭМП) формулами [1]:

$$\vec{E} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{\Pi} + k^2\vec{\Pi} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{\Pi},\ \vec{H} = -i\omega\varepsilon\operatorname{rot}\vec{\Pi},\ k^2 = \omega^2\varepsilon\mu, \tag{1}$$

где $\vec{\Pi}$ — электрический вектор Герца. В дальнейшем в качестве векторов Герца выберем сцециальные поля:

$$\vec{\tilde{\Pi}}_{mn}^{(j)} = \tilde{\psi}_{mn}(r, \theta, \varphi)\vec{e}_j,\ \vec{\Pi}_{mn}^{(j)} = \psi_{mn}(r,\ \theta,\ \varphi)\vec{e}_j,\ j = 1,\ 2,\ 3, \tag{2}$$

где $\vec{e}_1 = \vec{e}_x$, $\vec{e}_2 = \vec{e}_y$, $\vec{e}_3 = \vec{e}_z$, $\psi_{mn} = j_n(kr)P_n^m(\cos\theta)e^{im\varphi}$, $\tilde{\psi}_{mn} = h_n^{(1)}(kr)P_k^m(\cos\theta)e^{im\varphi}$, $\{r,\ \theta,\ \varphi\}$ — сферические координаты.

Будем писать $\{\vec{E},\ \vec{H}\} \approx [\vec{A}]$, если после подстановки вектора Герца $\vec{A}$ в (1) получим ЭМП $\{\vec{E},\ \vec{H}\}$, символ $[\vec{A}]$ означает, что вектор $\vec{A}$ является вектором Герца.

ЭМП может быть построено также с помощью потенциалов Дебая (u, v) по формулам [1]:

$$E_r = \frac{\partial^2(ru)}{\partial r^2} + k^2ru,\quad H_r = \frac{\partial^2(rv)}{\partial r^2} + k^2rv,$$

$$E_\theta = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^2(ru)}{\partial\theta\partial r} + \frac{i\omega\mu}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial v}{\partial\varphi},\quad H_\theta = \frac{k^2}{i\omega\mu}\cdot\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial u}{\partial\varphi} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^2(rv)}{\partial\theta\partial r}, \tag{3}$$

$$E_\varphi = \frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial^2(ru)}{\partial\varphi\partial r} - i\omega\mu\frac{\partial v}{\partial\theta},\quad H_\varphi = -\frac{k^2}{i\omega\mu}\cdot\frac{\partial u}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial^2(rv)}{\partial\varphi\partial r}.$$

Запишем $\{\vec{E},\ \vec{H}\} \approx (u,\ v)$, если после подстановки потенциалов Дебая u, v в (3) получим ЭМП $\{\vec{E},\ \vec{H}\}$.

Можно показать, что $\left\{k\tilde{n}_{mn},\ \frac{k^2}{i\omega\mu}\tilde{m}_{mn}\right\} \approx (\tilde{\psi}_{mn},\ 0)$, $\{i\omega\mu\tilde{m}_{mn},\ k\tilde{n}_{mn}\} \approx (0,\ \tilde{\psi}_{mn})$, где [2, 3]: $\tilde{m}_{mn} = \operatorname{rot}(\tilde{\psi}_{mn},\ \vec{r})$, $\tilde{n}_{mn} = \frac{1}{k}\operatorname{rot}\tilde{m}_{mn}$, $\tilde{m}_{mn} = \frac{1}{k}\operatorname{rot}\tilde{n}_{mn}$. Используя рекуррентные соотношения для присоединенных функций Лежандра и сферических функций Бесселя, получаем:

$$\{\vec{\tilde{E}}_{mn}^{(j)},\ \vec{\tilde{H}}_{mn}^{(j)}\} \approx [\vec{\tilde{\Pi}}_{mn}^{(j)}] \approx (\tilde{u}_{mn}^{(j)},\ \tilde{v}_{mn}^{(j)}), \tag{4}$$

$$\{\vec{E}_{mn}^{(j)},\ \vec{H}_{mn}^{(j)}\} \approx [\vec{\Pi}_{mn}^{(j)}] \approx (u_{mn}^{(j)},\ v_{mn}^{(j)}), \tag{5}$$

где потенциалы Дебая определяются выражениями:

$$\tilde{u}_{mn}^{(1)} = \frac{k}{2(2n+1)}\left\{\frac{1}{n}\tilde{\psi}_{m+1,\ n-1} - \frac{1}{n+1}\tilde{\psi}_{m+1,\ n+1} - \frac{(n+m)(n+m-1)}{n}\tilde{\psi}_{m-1,\ n-1} + \frac{(n-m+1)(n-m+2)}{n+1}\tilde{\psi}_{m-1,\ n+1}\right\},$$

$$\tilde{v}_{mn}^{(1)} = \frac{k^2}{2\omega\mu}\left\{\frac{1}{n(n+1)}\tilde{\psi}_{m+1,\ n} + \frac{(n+m)(n-m+1)}{n(n+1)}\tilde{\psi}_{m-1,\ n}\right\},$$

$$\tilde{u}_{mn}^{(2)} = \frac{k}{2(2n+1)i}\left\{\frac{1}{n}\tilde{\psi}_{m+1,\ n-1} - \frac{1}{n+1}\tilde{\psi}_{m+1,\ n+1} + \frac{(n+m)(n+m-1)}{n}\tilde{\psi}_{m-1,\ n-1} - \frac{(n-m+1)(n-m+2)}{n+1}\tilde{\psi}_{m-1,\ n+1}\right\},$$

$$\tilde{v}_{mn}^{(2)} = \frac{k^2}{2\omega\mu i}\left\{\frac{1}{n(n+1)}\tilde{\psi}_{m+1,\ n} - \frac{(n+m)(n-m+1)}{n(n+1)}\tilde{\psi}_{m-1,\ n}\right\},$$

$$\tilde{u}_{mn}^{(3)} = \frac{k}{2n+1}\left\{\frac{n+m}{n}\tilde{\psi}_{m,\ n-1} + \frac{n-m+1}{n+1}\tilde{\psi}_{m,\ n+1}\right\},$$

$$\tilde{v}_{mn}^{(3)} = \frac{mk^2}{n(n+1)\omega\mu}\tilde{\psi}_{mn}.$$

Для вычисления $u_{mn}^{(j)}$, $v_{mn}^{(j)}$ необходимо заменить $\tilde{\psi}_{mn}$ на $\tilde{\psi}_{mn}$.

Рассмотрим ЭМП $(\tilde{\psi}_{mn}(O_1), 0)$ в сферической системе координат $O_1 r_1 \theta_1 \varphi_1$ и разложим его по электромагнитным полям в сферической системе координат $O_2 r_2 \theta_2 \varphi_2$. Имеем $(\tilde{\psi}_{mn}(O_1), 0) \approx \{\vec{E}(O_1), \vec{H}(O_1)\}$, где $\vec{H}(O_1) = -\frac{k^2}{i\omega\mu} \operatorname{rot}(\tilde{\psi}_{mn}(O_1)\vec{r}_1) = [\vec{r}_1 = \vec{r}_2 + \vec{a}] = \frac{k^2}{i\omega\mu}\{\operatorname{rot}(\tilde{\psi}_{mn}(O_1)\vec{r}_2) + \operatorname{rot}(\tilde{\psi}_{mn} \times (O_1)\vec{a})\}$, $\vec{a} = a_1\vec{e}_x + a_2\vec{e}_y + a_3\vec{e}_z$, $a_1 = r_0 \cos\varphi_0 \sin\theta_0$, $a_2 = r_0 \sin\varphi_0 \sin\theta_0$, $a_3 = r_0 \cos\theta_0$; $\{r_0, \theta_0, \varphi_0\}$ — сферические координаты начала O_2 в системе O_1.

Используя теоремы сложения для сферических волновых функций [1. С. 137], получаем теоремы сложения для потенциалов Дебая.

$$(\tilde{\psi}_{mn}(O_1), 0) \approx (u_{mn}(O_2), v_{mn}(O_2)) = \\ = \left(\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{p=-l}^{l} A_{pl}^{mn}\tilde{\psi}_{pl}(O_2), \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{p=-l}^{l} B_{pl}^{mn}\tilde{\psi}_{pl}(O_2)\right), \ (r_2 > r_0), \tag{6}$$

где
$$A_{pl}^{mn} = kr_0\left\{\frac{1}{2}\sin\theta_0\left[\frac{1}{(l+1)(2l+3)}C_{p-1,\,l+1}^{mn} - \frac{1}{l(2l-1)}C_{p-1,\,l-1}^{mn} - \right.\right. \\ \left. - \frac{(l+p+2)(l+p+1)}{(l+1)(2l+3)}C_{p+1,\,l+1}^{mn} + \frac{(l-p-1)(l-p)}{l(2l-1)}C_{p+1,\,l-1}^{mn}\right] + \\ \left. + \cos\theta_0\left[\frac{l+p+1}{(l+1)(2l+3)}C_{p,\,l+1}^{mn} + \frac{l-p}{l(2l-1)}C_{p,\,l-1}^{mn}\right] + C_{pl}^{mn}\right\} e^{i(m-p)\varphi_0},$$

$$B_{pl}^{mn} = \frac{k^2 r_0}{l(l+1)\omega\mu}\left\{\frac{1}{2}\sin\theta_0\,[C_{p-1,\,l}^{mn} + (l+p+1)(l-p)\,C_{p+1,\,l}^{mn}] + \right. \\ \left. + p\cos\theta_0 C_{pl}^{mn}\right\} e^{i(m-p)\varphi_0}, \text{ где}$$

$$C_{pl}^{mn} = \begin{cases} \dfrac{(2l+1)(l-p)!}{(l+p)!}\displaystyle\sum_{\sigma=|l-n|}^{l+n} i^{\sigma+l-n} b_\sigma^{(nmlp)} j_\sigma(kr_0)\, P_\sigma^{m-p}(\cos\theta_0), \\ 0, \text{ если } |p| > l \text{ или } l < 0. \end{cases} \tag{7}$$

Аналогично

$$(0, \tilde{\psi}_{mn}(O_1)) \approx \left(-\frac{\mu}{\varepsilon} v_{mn}(O_2), u_{mn}(O_2)\right), \tag{8}$$

где функции справа в формулах (6), (8) являются потенциалами Дебая в системе координат $O_2 r_2 \theta_2 \varphi_2$. Можно получить также теоремы сложения:

$$(\psi_{mn}(O_1), 0) \approx \left(\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{p=-l}^{l} A_{pl}^{mn}\psi_{pl}(O_2), \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{p=-l}^{l} B_{pl}^{mn}\psi_{pl}(O_2)\right),$$

$$(\tilde{\psi}_{mn}(O_1), 0) \approx \left(\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{p=-l}^{l} \tilde{A}_{pl}^{mn}\psi_{pl}(O_2), \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{p=-l}^{l} \tilde{B}_{pl}^{mn}\psi_{pl}(O_2)\right), \ (r_2 < r_0),$$

где для вычисления $\tilde{A}_{pl}^{mn}$, $\tilde{B}_{pl}^{mn}$ достаточно заменить в формулах (7) $j_\sigma(kr_0)$ на $h_\sigma^{(1)}(kr_0)$. Аналогичные формулы в другой форме получены в [2]. В формулах (6) при практических вычислениях могут быть использованы соотношения [4] для коэффициентов (7).

Приведем формулы, представляющие векторы Герца в цилиндрических координатах $\{\rho, z, \varphi\}$:

$$\vec{A}_m^{(j)}(\rho, z, \varphi; \lambda) = I_m(v\rho)\, e^{i\lambda z + im\varphi}\vec{e}_j, \ v = \sqrt{\lambda^2 - k^2}, \ \frac{\pi}{2} > \arg v \geqslant -\frac{\pi}{2} \tag{9}$$

через потенциалы Дебая в сферических координатах.

Разложим (9) по сферическим волновым функциям [5]:

$$\vec{A}_m^{(j)}(\rho,\ z,\ \varphi;\ \lambda) = \sum_{n=|m|}^{\infty} D_n(\lambda)\vec{\Pi}_{mn}^{(j)}(r,\ \theta,\ \varphi),$$

$$\text{где } D_n(\lambda) = (-1)^m \frac{i^n(2n+1)(n-m)!}{(n+m)!}\widetilde{P}_n^m\left(\frac{\lambda}{k}\right),$$

$$\widetilde{P}_n^m\left(\frac{\lambda}{k}\right) = \left(\frac{-iv}{k}\right)^m \frac{d^m}{d\xi^m} P_n(\xi),\ \xi = \frac{\lambda}{k}.$$

Используя (5), получаем

$$[\vec{A}_m^{(j)}(\rho,\ z,\ \varphi;\ \lambda)] \approx \left(\sum_{n=|m|}^{\infty} D_n(\lambda)\, u_{mn}^{(j)}(r,\ \theta,\ \varphi),\ \sum_{n=|m|}^{\infty} D_n(\lambda)\, v_{mn}^{(j)}(r,\ \theta,\ \varphi)\right).$$

Далее приведем формулы, представляющие векторы Герца в декартовых координатах:

$$\vec{B}^{(\mp j)}(x,\ y,\ z;\ \lambda,\ \beta) = e^{\mp az + i\lambda x + i\beta y}\vec{e}_j,\ a = \sqrt{\lambda^2 + \beta^2 - k^2},$$

$$\frac{\pi}{2} > \arg a \geqslant -\frac{\pi}{2} \tag{10}$$

через потенциалы Дебая в сферических координатах.

Разложим (10) по сферическим волновым функциям [6]: $\vec{B}^{(\mp j)}(x,\ y,\ z;\ \lambda,\ \beta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=|m|}^{\infty} A_{mn}^{(\mp)}\vec{\Pi}_{mn}^{(j)}(r,\ \theta,\ \varphi)$, где $A_{mn}^{(\mp)} = (-i)^n \frac{(2n+1)(n-m)!}{(n+m)!} \times \left(\frac{i\beta - \lambda}{\sqrt{\lambda^2+\beta^2}}\right)^m \widetilde{P}_n^m\left(\mp \frac{ia}{k}\right)$.

Используя (5), получаем

$$[\vec{B}^{(\mp j)}(x,\ y,\ z;\ \lambda,\ \beta)] \approx \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=|m|}^{\infty} A_{mn}^{(\mp)} u_{mn}^{(j)}(r,\ \theta,\ \varphi) \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=|m|}^{\infty} A_{mn}^{(\mp)} v_{mn}^{(j)}(r,\ \theta,\ \varphi)\right). \tag{11}$$

Выражения (11) в другой форме приведены в [7. С. 169].

Выведенные формулы переразложения (теоремы сложения) используются для решения краевых задач дифракции аналитическими методами [8].

Список литературы

1. Иванов Е. А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск, 1968.
2. Cruzan O. R. // Quart. of Appl. Math. 1962. T. 20. № 1. P. 33.
3. Ерофеенко В. Т., Кардаш С. Н. // Диф. уравнения. 1978. Т. 14. № 6. С. 1060.
4. Ronchi L., Barbarino S., Grasso F., Guerriera G., Musumeci F., Scordino A. // Lett Nuovo Cim. 1982. V. 35. № 11. P. 353.
5. Ерофеенко В. Т. // Диф. уравнения. 1973. Т. 9. № 7. С. 1310.
6. Ерофеенко В. Т. // Там же. 1978. Т. 14. № 8. С. 1439.
7. Шестопалов В. П. Сумматорные уравнения в современной теории дифракции. Киев, 1983.
8. Иванов Е. А., Родов А. М. // Весці АН БССР. Сер. фіз.-тех. навук. 1964. № 4. С. 5.

Поступила в редакцию 09.07.86.