$$\Theta=\begin{bmatrix}\Theta_1\\ \vdots\\ \Theta_{n_1}\end{bmatrix}\text{ — }n_1\text{-вектор},\quad \Xi=\begin{bmatrix}\Theta_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \Theta_{n_1}\end{bmatrix},\quad M=\begin{bmatrix}a_m & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & a_m\end{bmatrix} \qquad (35)$$

— —$n_1\times n_1$-матрицы.

Тогда, учитывая (34)—(35), (33) запишем в виде:

$$\Theta'\{\Xi-M\}\Theta\geqslant 0. \qquad (36)$$

Согласно [5], квадратичная форма (36) неотрицательно определена тогда и только тогда, когда матрица этой квадратичной формы имеет неотрицательные характеристические числа, т. е. получаем (24).

Неравенство (27) получаем, учитывая (26) и требуя, чтобы подкоренное выражение в M_4 было больше нуля; (32) следует из неравенств (26) и (24). Подставляя в (32) выражение из (28), имеем неравенство относительно m.

5. Пример. При $n=4$, $N=3$, $\alpha=0{,}1$, $\nu=1$, $P_{1s}=0{,}5$, $P_{2s}=P_{3s}=0{,}25$, $s=1, \ldots, m$, $b=1{,}01$, $a_m=1{,}0000129$, $m=5637$, коэффициенты c_{12}, c_{34} можно выбрать следующим образом: $c_{12}=1$, $c_{34}=0{,}001$.

Теоретическая оценка объема выборки m по (10) является завышенной. Так, если подставить полученные значения m, c_{hv} в (13), будем иметь: $\sup\limits_x|F_m(x)-\Phi(x)|\leqslant 0{,}0345268$, т. е. на порядок лучше, чем предполагали.

Список литературы

1. Орлов А. И. Устойчивость в социально-экономических моделях. М., 1979.
2. Орлов А. И. // Алгоритмическое и программное обеспечение прикладного статистического анализа. М., 1980.
3. Орлов А. И. // Экспертные оценки в задачах уравнения. М., 1982.
4. Петров В. В. Суммы независимых случайных величин. М., 1972.
5. Мальцев А. И. Основы линейной алгебры. М., 1970.

Поступила в редакцию 16.04.86.

УДК 517.968.7

У. У. ДИАЛЛО

К ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

В настоящей работе изучается линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt}=A(t)\,x \qquad (1)$$

с действующим в пространстве C непрерывных на отрезке $[a, b]$ вещественных функций оператором

$$A(t)\,x(s)=c(t,\ s)\,x(s)+\int_a^b k(t,\ s,\ \sigma)\,x(\sigma)\,d\sigma. \qquad (2)$$

Здесь $c(t, s)$ и $k(t, s, \sigma)$ — заданные на $\mathbf{R}\times[a, b]$ и $\mathbf{R}\times[a, b]\times[a, b]$ вещественные измеримые функции.

Уравнения вида (1) наряду с бесконечными системами линейных уравнений являются естественным бесконечномерным аналогом конечных линейных систем. Однако если бесконечным системам посвящена значительная литература (см., например, [1]), интегро-дифференциальные уравнения (1), несмотря на то, что встречаются во многих задачах анализа (в частности, в теории вероятностей), почти не исследовались (отдельные результаты см., например, [2—5]).

В предлагаемой статье в явном виде выписываются условия на функции $c(t, s)$ и $k(t, s, \sigma)$, при которых (1) может рассматриваться как линейное дифференциальное уравнение в пространстве C, описываются вид и свойства функции Коши этого уравнения, условия существования функции Грина в задачах об ограниченных и ω-периодических решениях, условия их непрерывной зависимости от параметров и т. д.

1. Рассмотрим вначале линейный оператор

$$Ax(s) = c(s)\, x(s) + \int_a^b k(s, \sigma)\, x(\sigma)\, d\sigma. \tag{3}$$

Пусть

$$\alpha(s) = c(s) + \int_a^b k(s, \sigma)\, d\sigma, \tag{4}$$

$$\beta(c, s) = \int_a^c \{c(s)\, \chi(s, \sigma) + (c - \sigma)\, k(s, \sigma)\}\, d\sigma \quad (a < c < b) \tag{5}$$

(здесь $\chi(s, \sigma)$ — характеристическая функция бесконечного отрезка $[s, \infty)$ и

$$\gamma(s) = |c(s)| + \int_a^b |k(s, \sigma)|\, d\sigma. \tag{6}$$

Из классических результатов Ф. Рисса — И. Радона [6—8] вытекает следующее утверждение.

Лемма 1. *Линейный оператор (3) действует в пространстве C в том и только том случае, когда функции (4) и (5) определены и непрерывны, а функция (6) ограничена. При этом он непрерывен и*

$$\|A\| = \sup_{a<s<b} \gamma(s). \tag{7}$$

В частности, из леммы 1 вытекает, что пространство $\mathbf{L}_r(C)$ операторов вида (3) есть замкнутое подпространство пространства $\mathbf{L}(C)$ непрерывных линейных операторов, действующих в C; представление операторов из $\mathbf{L}_r(C)$ в виде (3) единственно; множество $\mathbf{L}_i(C)$ интегральных операторов (т. е. операторов вида (3) с нулевой функцией $c(s)$) является идеалом в $\mathbf{L}_r(C)$.

Интересно отметить, что оператор (3) может действовать в пространстве C в случаях, когда его отдельные слагаемые не будут линейными операторами в C. Из леммы 1 следует, что множество $\mathbf{L}_d(C)$ операторов вида (3), для которых оба слагаемых — операторы в C, также будет замкнутым подпространством $\mathbf{L}(C)$. Замкнутым является и подпространство $\mathbf{L}_k(C)$ пространства $\mathbf{L}_d(C)$ операторов (3), для которых интегральное слагаемое — компактный оператор в C.

2. Введем в рассмотрение функции

$$\alpha(t, s) = c(t, s) + \int_a^b k(t, s, \sigma)\, d\sigma, \tag{8}$$

$$\beta(c, t, s) = \int_a^c \{c(t, s)\, \chi(s, \sigma) + (c - \sigma)\, k(t, s, \sigma)\}\, d\sigma \tag{9}$$

и

$$\gamma(t, s) = |c(t, s)| + \int_a^b |k(t, s, \sigma)|\, d\sigma, \tag{10}$$

построенные по оператор-функции (2). Из леммы 1 и общих теорем об оператор-функциях вытекает

Теорема 1. Оператор-функция (2) является слабо (сильно) непрерывной функцией в $\mathbf{L}_r(C)$ в том и только том случае, когда выполняются условия:

а) функции (8) и (9) непрерывны по каждой переменной (по совокупности переменных) $t, s \in \mathbf{R} \times [a, b]$;

б) функция (10) ограничена на каждом прямоугольнике $[-T, T] \times \times [a, b]$ $(0 < T < \infty)$.

Оператор-функция (2) будет непрерывной по норме функцией в $\mathbf{L}_r(C)$ в том и только том случае, когда выполнено условие б) и, кроме того, условия:

в) функции (8) и (9) непрерывны по s на $[a, b]$ при каждом фиксированном $t \in \mathbf{R}$;

г) функция $c(t, s)$ непрерывна по t на $\mathbf{R}$ равномерно относительно $s \in [a, b]$;

д) функция $k(t, s, \sigma)$ при любом $T > 0$ удовлетворяет соотношению

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{a \leqslant s \leqslant b,\ -T \leqslant t,\ \tau \leqslant T,\ |t-\tau| < \delta} \int_a^b |k(t, s, \sigma) - k(\tau, s, \sigma)| \, d\sigma = 0. \qquad (11)$$

В условиях теоремы 1 в силу общих теорем о линейных дифференциальных уравнениях в банаховых пространствах (см., например, [5]) определена функция Коши $U(t, \tau)$, которая является решением интегрального уравнения

$$U(t, \tau) = I + \int_\tau^t A(\xi) U(\xi, \tau) \, d\xi. \qquad (12)$$

Эта оператор-функция со значениями в $\mathbf{L}(C)$ вместе со своей производной $U'_t(t, \tau)$ обладает теми же свойствами непрерывности, что и исходная оператор-функция (2). Более точная информация содержится в следующем утверждении.

Теорема 2. Пусть выполнены условия одного из утверждений теоремы 1. Тогда функция Коши $U(t, \tau)$ является оператор-функцией в $\mathbf{L}_r(C)$ и, более того, представима в виде

$$U(t, \tau) x(s) = e^{\int_\tau^t c(\xi, s) d\xi} x(s) + \int_a^b w(t, \tau, s, \sigma) x(\sigma) \, d\sigma, \qquad (13)$$

где $w(t, \tau, s, \sigma)$ — определенная при $-\infty < t, \tau < \infty$, $a \leqslant s, \sigma \leqslant b$ вещественная функция; при этом она слабо (сильно) непрерывна или непрерывна по норме на $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, если слабо (сильно) непрерывна или непрерывна по норме на $\mathbf{R}$ оператор-функция (2). Кроме того, значения $U(t, \tau)$ при всех t, τ лежат в $\mathbf{L}_d(C)$ или $\mathbf{L}_k(C)$, если значения (2) при всех t лежат в $\mathbf{L}_d(C)$ или соответственно в $\mathbf{L}_k(C)$.

Теоремы 1 и 2 позволяют перенести на уравнения (1) почти все классические результаты, известные для конечных систем. Например, уравнение (1) является приводимым, если оператор-функция (2) ω-периодична по t с некоторым $\omega \neq 0$; последнее означает ω-периодичность по t функций $c(t, s)$ и $k(t, s, \sigma)$. С их помощью на уравнения (1) легко могут быть распространены теоремы о непрерывной зависимости функции Коши от параметров, приведенные в [9].

3. Остановимся еще на задачах об ограниченных и ω-периодических решениях уравнения (1). Если оператор-функция (2) не зависит от t, т. е. $A(t) = A$, где A определен равенством (3), существование функции Грина этой задачи равносильно предположению о том, что спектр (3) не содержит нуля и чисто мнимых значений (чисто мнимых значений, кратных $i\omega$); последнее в случае, когда $A \in \mathbf{L}_k(C)$, означает, что функция $c(s)$ из (3) не обращается в нуль и что оператор (3) не имеет нулевого и чисто мнимых собственных значений. Приведем одно утверждение о существовании функции Грина для общего случая; оно является аналогом классической леммы Боголюбова (см., например, [10]).

Теорема 3. Пусть оператор-функция (2) и оператор (3) связаны соотношениями:

$$\lim_{T\to\infty} \sup_{-\infty<t<\infty,\ a\leq s\leq b} \left| \frac{1}{T} \int_t^{t+T} c(\tau, s)\, d\tau - c(s) \right| = 0,$$

$$\lim_{T\to\infty} \sup_{-\infty<t<\infty,\ a\leq s\leq b} \int_a^b \left| \frac{1}{T} \int_t^{t+T} k(\tau, s, \sigma)\, d\tau - k(s, \sigma) \right| d\sigma = 0,$$

причем задача об ограниченных решениях для уравнения $dx/dt=Ax$ обладает функцией Грина $G(t, \tau)$. Тогда при достаточно малых ε задача об ограниченных решениях для уравнения $dx/dt=\varepsilon A(t)x$ также обладает функцией Грина $G_\varepsilon(t, \tau)$, равномерно сходящейся при $\varepsilon\to 0$ к функции Грина $G(t, \tau)$.

В заключение автор выражает благодарность П. П. Забрейко, под руководством которого он работает.

Список литературы

1. Валеев К. Г., Жаутыков О. А. Бесконечные системы дифференциальных уравнений. Алма-Ата, 1974.
2. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М., 1962.
3. Красносельский М. А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М., 1966.
4. Забрейко П. П., Нурекенов Т. // Вестн. АН КазССР. 1966. № 5. С. 32.
5. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дефференциальных уравнений в банаховых пространствах. М., 1970.
6. Рисс Ф. // УМН. 1936. Вып. 1. С. 175.
7. Радон И. Там же. С. 200.
8. Гливенко В. Л. Интеграл Стильтьеса. М.; Л., 1936.
9. Левин А. Ю. // Докл. АН СССР. 1967. Т. 176. № 4. С. 774.
10. Забрейко П. П., Колесов Ю. С., Красносельский М. А. Там же. 1969. Т. 184. № 3. С. 526.

Поступила в редакцию 02.06.86.

УДК 621.391.1:519.28

Е. Н. МЕЛЬНИКОВА, Ю. С. ХАРИН

О КЛАССИФИКАЦИИ СЕРИЙ МНОГОМЕРНЫХ НАБЛЮДЕНИЙ ПРИ СЛУЧАЙНОЙ ДЛИНЕ СЕРИЙ

При разработке автоматизированных комплексов идентификации сложных систем, имеющих на случайных интервалах времени различную структуру или различные режимы функционирования, возникают задачи классификации наблюдений, образованных сериями случайной длины. Рассматриваемая в работе задача является обобщением задачи [1] и отличается тем, что длины серий являются случайными величинами.

Математическая модель. Пусть в пространстве наблюдений R^N определено m-параметрическое семейство плотностей $Q=\{p(x;\Theta)\colon x\in R^N, \Theta\subset\Xi\subset R^m\}$, $L\geqslant 2$ — натуральное число, обозначающее число классов, $\{\Theta_1^0, \ldots, \Theta_L^0\}\subset\Xi$ — подмножество L различных точек. Пусть далее $x_1, \ldots, x_n\in R^N$ — наблюдаемый временной ряд, образованный из K^0 независимых серий случайной длины:

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}=\{X_1\ X_2, \ldots, X_{K^0}\}, \tag{1}$$

где $X_j=\{x_1, \ldots, x_{\tau_j^0}\}$ — j-я случайная серия $(j=\overline{1, K^0})$, состоящая из τ_j^0 независимых наблюдений одного и того же класса $\Omega_{I_j^0}$ $(I_j^0\in S(L)=\{1, \ldots, L\})$, имеющих плотность распределения вероятностей $p(x;$