УДК 681.325

А. А. КОЛЯДА, М. Ю. СЕЛЯНИНОВ

НОРМАЛИЗАЦИЯ ЧИСЕЛ В МОДУЛЯРНОЙ СИСТЕМЕ СЧИСЛЕНИЯ

В процессе построения арифметики модулярных систем счисления (МСС) в режиме с плавающей запятой важную роль играет операция нормализации чисел. Известные алгоритмы нормализации мантисс результатов арифметических операций базируются на процедуре преобразования модулярного кода в полиадический код [1, 2]. Последовательный характер применяемого преобразования существенно увеличивает время нормализации чисел, а также затрудняет организацию конвейерной обработки информации. В данной работе предлагаются методы и алгоритмы нормализации чисел в МСС с использованием интервально-индексных характеристик [3], которые обладают высоким уровнем параллелизма и имеют конвейерную структуру.

В статье наряду с обозначениями работы [4] используются обозначения: $D=\{-p\cdot M_{k-1}, -p\cdot M_{k-1}+1, \ldots, p\cdot M_{k-1}-1\}$ — диапазон МСС (p — фиксированное натуральное число); S — коэффициент нормализации.

Определение. Интервально-модулярным представлением произвольного целого числа $X\in D$ в МСС с модулями $m_1, m_2, \ldots, m_k$ называется представление вида

$$X=\sum_{i=1}^{k-1} M_{i,\,k-1}\cdot\varkappa_{i,\,k-1}+I_k(X)\cdot M_{k-1}, \tag{1}$$

где целое число $I_k(X)$ называется интервальным индексом числа X. Характеристика $J_k(X)=[I_k(X)/m_k]$ называется главным интервальным индексом числа X.

Предлагается метод умножения на константы. Данный метод основан на умножении нормализуемого числа $X\in D$, заданного своим модулярным кодом $(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_k)$, на константы вида S^l, $l=1, 2, \ldots, n$, где $n=1+[\log_S p\cdot M_{k-1}]$. Если при умножении на константы S^l для всех $l=1, 2, \ldots, \nu$ выполняется условие $X^{(l)}=X\cdot S^l\in D^*=\{Y\,|-p-k+2\leqslant I_k(Y)\leqslant p-1\}$, где $I_k(Y)$ — интервальный индекс числа Y, а для $l=\nu+1$ данное условие не выполняется, т. е. $X^{(\nu+1)}=X\cdot S^{\nu+1}\notin D^*$, то число $X^{(\nu)}$ считается нормализованным. При этом исходное число X и нормализованное $X^{(\nu)}$ связаны между собой соотношением $X=\mu(X)\times S^{-\nu(X)}$, где $\mu(X)=X^{(\nu)}$ — мантисса, а $\nu(X)=\nu$ — порядок числа X.

Проверка принадлежности числа $X^{(l)}$, $l=1, 2, \ldots, n$ множеству D^* требует формирования интервального индекса $I_k(X^{(l)})$. Используя интервально-модулярное представление числа X (1) можно записать

$$X^{(l)}=\sum_{i=1}^{k-1} M_{i,\,k-1}\cdot\varkappa_{i,\,k-1}\cdot S^l+I_k(X)\cdot M_{k-1}\cdot S^l. \tag{2}$$

Применяя вытекающее из леммы Евклида (теории делимости) соотношение

$$\varkappa_{i,\,k-1}\cdot S^l=\varkappa_{i,\,k-1}^{(l)}+m_k\cdot\left[\frac{\varkappa_{i,\,k-1}\cdot S^l}{m_k}\right],$$

где $\varkappa_{i,\,k-1}^{(l)}=|\varkappa_{i,\,k-1}\cdot S^l|_{m_i}$, $i=1, 2, \ldots, k-1$, можно преобразовать число (2) к виду $X^{(l)}=\sum\limits_{i=1}^{k-1} M_{i,\,k-1}\cdot\varkappa_{i,\,k-1}^{(l)}+I_k(X^{(l)})\cdot M_{k-1}$, где $I_k(X^{(l)})$ — интервальный индекс числа $X^{(l)}$, для которого справедлива формула

$$I_k(X^{(l)})=I_k(X)\cdot S^l+\sum_{i=1}^{k-1}\left[\frac{\varkappa_{i,\,k-1}\cdot S^l}{m_i}\right]. \tag{3}$$

По лемме Евклида интервальный индекс числа $X^{(l)}$ может быть представлен в виде $I_k(X^{(l)}) = \bar{I}_k(X^{(l)}) + m_k \cdot J_k(X^{(l)})$, где $\bar{I}_k(X^{(l)}) = |I_k(X^{(l)})|_{m_k}$ — машинный интервальный индекс числа $X^{(l)}$.

С точки зрения машинной реализации проверку условия $X^{(l)} \in D^*$, что эквивалентно проверке выполнения неравенства

$$-p - k + 2 \leqslant I_k(X^{(l)}) \leqslant p - 1, \tag{4}$$

удобно производить при помощи машинного интервального индекса $\bar{I}_k(X^{(l)})$ и главного интервального индекса $J_k(X^{(l)})$. При этом проверка условия (4) сводится к проверке следующих соотношений:

$$\begin{cases} \bar{I}_k(X^{(l)}) \in [0,\ p-1];\ J_k(X^{(l)}) = 0, \\ \bar{I}_k(X^{(l)}) \in [m_k - p - k + 2,\ m_k - 1];\ J_k(X^{(l)}) = -1, \end{cases} \tag{5}$$

или, что то же самое,

$$\begin{cases} \bar{I}_k(X^{(l)}) \in [0,\ p-1];\ |J_k(X^{(l)})|_{m_k} = 0, \\ \bar{I}_k(X^{(l)}) \in [m_k - p - k + 2,\ m_k - 1];\ |J_k(X^{(l)})|_{m_k} = m_k - 1. \end{cases} \tag{6}$$

Величины $\bar{I}_k(X^{(l)})$ и $|J_k(X^{(l)})|_{m_k}$ могут быть получены непосредственно из формулы (3). Легко заметить, что предлагаемая процедура нормализации числа X наиболее просто реализуется при равенстве коэффициента нормализации S k-ому модулю выбранной МСС m_k. В этом случае для машинного и главного интервальных индексов числа $X^{(l)}$ справедливы соотношения

$$\bar{I}_k(X^{(l)}) = R_l,\ l = 1, 2, \ldots, n, \tag{7}$$

$$|J_k(X^{(l)})|_{m_k} = \begin{cases} |I_k(X) + Q_1|_{m_k}, \text{ если } l = 1, \\ |Q_l|_{m_k}, \text{ если } l = 2, 3, \ldots, n, \end{cases} \tag{8}$$

где $R_l = \left|\sum\limits_{i=1}^{k-1}\left[\dfrac{\varkappa_{i,\,k-1} \cdot m_k^l}{m_i}\right]\right|_{m_k}$, $\quad Q_l = \left[\dfrac{1}{m_k} \cdot \sum\limits_{i=1}^{k-1}\left[\dfrac{\varkappa_{i,\,k-1} \cdot m_k^l}{m_i}\right]\right]$.

На основании изложенного можно предложить следующий алгоритм нормализации числа X в системе с модулями $m_1, m_2, \ldots, m_k$.

1. По модулярному коду $(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_k)$ числа $X \in D$ $(\varkappa_i = |X|_{m_i}$, $i = 1, 2, \ldots, k)$ для всех $l = 1, 2, \ldots, n$ вычисляются величины $\bar{I}_k(X^{(l)})$ и $|J_k(X^{(l)})|_{m_k}$ по формулам (7) и (8).

2. Для всех $l = 1, 2, \ldots, n$ проверяется принадлежность числа $X^{(l)}$ множеству D^* в соответствии с (6).

3. Определяется ν такое, что $X^{(\nu)} \in D^*$, а $X^{(\nu+1)} \notin D^*$.

4. Определяется порядок $\nu(X) = \nu$ и модулярный код $(\varkappa_1^{(\nu)}, \varkappa_2^{(\nu)}, \ldots, \varkappa_k^{(\nu)})$ мантиссы $\mu(X) = X^{(\nu)}$ по формуле $\varkappa_i^{(\nu)} = |X \cdot S^\nu|_{m_i}$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Приведенный алгоритм допускает как последовательную [5], так и параллельную реализацию. При максимальном распараллеливании вычислений он может быть выполнен за $4 +]\log_2 k[$ модульных операций. В соответствии с теоремами кодирования МСС [6, 7] и результатами, полученными в [8], такое быстродействие можно считать предельным.

Главную часть оборудования устройства для нормализации чисел, функционирующего в соответствии с изложенным алгоритмом, составляют блоки суммирования вычетов (БСВ) по модулю m_k, число которых равно n. Использование идентичных БСВ следует считать достоинством описанного подхода, так как соответствующее устройство нормализации обладает высокой однородностью, что очень важно для реализации устройства в виде больших интегральных схем. Необходимо, однако, заметить, что неотъемлемым элементом арифметических устройств (АУ), функционирующих в МСС, является формирователь интегральных характеристик модулярного кода, в состав которого входят БСВ по всем модулям МСС [9, 10]. В рамках структур АУ, обеспечивающих использование одних и тех же БСВ для выполнения различных немодульных операций, требуются устройства для нормализации чисел, в которых применяются БСВ по всем модулям $m_1, m_2, \ldots, m_k$. Для получения соответствующего алгоритма нормализации чисел достаточно вместо множителей S^l $(l = 1, 2, \ldots, n)$ использовать константы $M^{(l)} = \prod_{j=k-l}^{k-1} m_j$ $(l = 1, 2, \ldots, k-1)$. При этом для рассматриваемого случая справедливы следующие расчетные соотношения для машинного $\bar{I}_k(X^{(l)})$ и главного $J_k(X^{(l)})$ интервальных индексов числа $X^{(l)} = X \cdot M^{(l)}$

$$\bar{I}_k(X^{(l)}) = \left|\sum_{i=1}^{k-1}\left[\frac{\varkappa_{i,\,k-1}\cdot M^{(l)}}{m_i}\right]\right|_{m_{k-l}}, \tag{9}$$

$$|J_k(X^{(l)})|_{m_{k-l-1}} = \left|\left[\frac{1}{m_i}\cdot\sum_{i=1}^{k-1}\left[\frac{\varkappa_{i,\,k-1}\cdot M^{(l)}}{m_i}\right]\right]\right|_{m_{k-l-1}}, \tag{10}$$

где $l = 1, 2, \ldots, k-1$.

Процесс нормализации с использованием множителей $M^{(1)}, M^{(2)}, \ldots$ $\ldots, M^{(k-1)}$ состоит в следующем.

1. По модулярному коду $(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_k)$ числа $X \in D$ для всех $l = 1, 2, \ldots, k-1$ вычисляются величины $\bar{I}_k(X^{(l)})$ и $|J_k(X^{(l)})|_{m_{k-l-1}}$ по формулам (9) и (10).

2. Для всех $l = 1, 2, \ldots, k-1$ проверяется принадлежность числа $X^{(l)}$ множеству D^*.

3. Определяется ν такое, что $X^{(\nu)} \in D^*$, е $X^{(\nu+1)} \notin D^*$.

4. Определяется порядок $\nu(X) = [\log_S M^{(\nu)}]$.

5. Определяется модулярный код $(\varkappa_1^{(\nu)}, \varkappa_2^{(\nu)}, \ldots, \varkappa_k^{(\nu)})$ мантиссы $\mu(X)$ по формуле $\varkappa_i^{(\nu)} = |X \cdot S^{\nu(X)}|_{m_i},\ i = 1, 2, \ldots, k$.

Быстродействие устройства для нормализации чисел, работающего в соответствии с данным алгоритмом, является таким же, как и у описанного выше: $4 +]\log_2 k[$ модульных операций. При использовании БСВ, имеющих конвейерную древовидную структуру, частота поступления входной информации в предлагаемом устройстве для нормализации чисел составляет $f = 1/t_{\text{МТ}}$, где $t_{\text{МТ}}$ — длительность модульного такта. Если, например, $t_{\text{МТ}} = 50$ нс, то $f = 20$ МГц.

В заключение отметим, что выполнение наиболее быстродействующего из известных алгоритмов нормализации чисел в МСС занимает не менее чем $k +]\log_2]\log_S(2 \cdot p \cdot M_{k-1})[[$ тактов [1], т. е. применение предложенного метода позволяет ускорить процесс нормализации не менее чем в $n = (k +]\log_2]\log_S(2 \cdot p \cdot M_{k-1})[[)/(4 +]\log_2 k[)$ раз. Если, например, $k = 8$, $S = 2$ и $p \cdot M_{k-1} \approx 2^{31}$, то $n = 1{,}85$.

Список литературы

1. Taylor F. J., Huang C. H. // J. of the Franklin Institute. 1981. V. 311. N 1. P. 33.
2. Kinoshita E., Kosako H., Kojima Y. // IEEE Trans. on Comput. 1974. V. C-23. N 1. P. 9.
3. Коляда А. А. // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1980. № 1. С. 6.
4. Коляда А. А. Там же. 1986. № 1. С. 46.
5. Буза М. К., Коляда А. А. А. с. 1242942 СССР // БИ. 1986. № 25. С. 192.
6. Сабо Н. // Кибернетический сборник. М., 1964. № 8. С. 149.
7. Амербаев В. М. Теоретические основы машинной арифметики. Алма-Ата, 1976.
8. Виноград С. // Кибернетический сборник. М., 1969. Вып. 6.
9. Коляда А. А. А. с. 968802 СССР // БИ. 1982. № 39. С. 265.
10. Коляда А. А. А. с. 1007098 СССР // БИ. 1983. № 11. С. 253.

Поступила в редакцию 27.03.86.