Аналогичные рассуждения можно провести для анализа оценок теоремы 2.

Список литературы

1. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М., 1982. С. 285.
2. Ковалев М. Я. Вычислительная техника в машиностроении. Минск, 1984. С. 21.
3. Chandra A. K., Wong C. K. // SIAM J. on Comput. 1975. V. 4. № 3. P. 249.
4. Ковалев М. М. // Кибернетика. 1985. Т. 6. С. 77.

Поступила в редакцию 07.05.86.

УДК 519.854.2

В. А. СТРУСЕВИЧ

МИНИМИЗАЦИЯ СУММАРНОГО ВРЕМЕНИ ОБСЛУЖИВАНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ С НЕФИКСИРОВАННЫМИ МАРШРУТАМИ

В систему, состоящую из $M > 1$ приборов, в момент времени $d = 0$ поступает множество $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ требований. Каждое требование $i \in N$ должно быть обслужено каждым прибором L, $1 \leqslant L \leqslant M$, в течение t_{iL} единиц времени (если $t_{iL} > 0$). Порядок, в котором требования обслуживаются приборами, заранее не задан и может быть различным для разных требований. Каждый прибор может обслуживать требования в произвольной последовательности, но не более одного требования одновременно. Каждое требование не может одновременно обслуживаться двумя и более приборами. Время завершения обслуживания требования $i \in N$ при некотором расписании s обозначим через $f_i(s)$. Рассмотрим задачу построения расписания s^*, которому соответствует наименьшее значение суммарного времени обслуживания $\sum\limits_{i \in N} f_i(s)$.

Известно, что сформулированная задача NP-трудна в сильном смысле при $M \geqslant 2$ (если прерывания запрещены) [1] и при $M \geqslant 3$ (если прерывания разрешаются) [2]. Если все t_{iL} равны единице, за исключением некоторых, равных нулю, то задача построения расписания s^* является NP-трудной при переменном числе приборов [3].

Рассмотрим ситуацию, когда все $t_{iL} = 1$, $i \in N$, $L = \overline{1, n}$. Прерывания процесса обслуживания каждого требования каждым прибором не допускаются.

1. Произвольному расписанию s для рассматриваемой задачи соответствует расписание s' для задачи минимизации суммарного времени обслуживания множества $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ требований в системе, состоящей из M параллельных идентичных приборов, при условии, что в обслуживании каждого требования допускаются прерывания и каждое требование должно обслуживаться в течение M единиц времени. Отметим, что $f_i(s) = f_i(s')$, $i \in N$.

Известно [4], что оптимальное расписание для последней задачи можно искать в классе расписаний, при которых процесс обслуживания каждого требования протекает без прерываний. Пусть $n = kM + r$, $k \geqslant 0$, $0 \leqslant r < M$, k и r — целые числа. В качестве оптимального расписания для указанной задачи с параллельными приборами может быть выбрано, например, расписание, при котором r приборов функционируют без простоев во временном интервале $[0, (k+1)M]$ и обслуживают (без прерываний) по $k+1$ требований каждый, а остальные $M - r$ приборов функционируют без простоев в интервале $[0, kM]$ и обслуживают (без прерываний) по k требований каждый. Суммарное время обслуживания при таком расписании равно $(k+1)Mr + M^2k(k+1)/2$.

Таким образом, при любом расписании s для исходной задачи имеет место соотношение

$$\sum_{i=1}^{kM+r} f_i(s) \geqslant (k+1)Mr + M^2k(k+1)/2. \qquad (1)$$

Расписание s^*, при котором в (1) имеет место знак равенства, будет, очевидно, оптимальным. Укажем несколько способов построения такого расписания.

Любое расписание s однозначно определяется заданием матрицы $\|f_{iL}(s)\|$ моментов завершения обслуживания каждого требования $i \in N$ каждым прибором L, $1 \leqslant L \leqslant M$. Введем в рассмотрение матрицу $X = \|x_{Lq}\|$, где $x_{Lq} = i$, если прибор L обслуживает требование i q-ым по порядку.

Пусть $n = kM + r$, $k \geqslant 0$, $0 \leqslant r < M$. Если $r = 0$, положим $l = k$. В противном случае положим $l = k + 1$ и дополним множество N требований $M - r$ фиктивными требованиями $n + 1, n + 2, \ldots, n + M - r$, длительность обслуживания каждого из которых любым прибором положим равной единице. Матрицу $X = \|x_{Lq}\|$ размерности $M \times lM$ разобьем на l подматриц X_j размерности $M \times M$, содержащих столбцы матрицы X с номерами $(j-1)M + 1$, $(j-1)M + 2, \ldots, jM$, $j = \overline{1, l}$.

а) Пусть каждая из подматриц X_j представляет собой латинский квадрат [5], построенный на множестве $\{(j-1)M + 1, (j-1)M + 2, \ldots$ $\ldots, jM\}$, $1 \leqslant j \leqslant l$. Положим $f_{x_{Lq}, L}(s_1^*) = q$, $q = \overline{1, lM}$, $L = \overline{1, M}$, $x_{Lq} \leqslant n$.

При расписании s_1^*, определяемом матрицей $\|f_{iL}(s_1^*)\|$, ровно M требований обслуживаются к каждому моменту времени jM, $1 \leqslant j \leqslant k$, и r требований к моменту времени $(k+1)M$. Таким образом, при $s = s_1^*$ в (1) имеет место знак равенства.

Отметим, что при $r = 0$ или $k = 0$ расписание s_1^* будет также оптимальным по быстродействию. Нетрудно проверить, что для любого расписания s имеет место соотношение

$$\sum_{i=1}^{p} f_i(s_1^*) \leqslant \sum_{i=1}^{p} f_i(s), \quad p = \overline{1, n}. \qquad (2)$$

б) Пусть $n = kM + r$, $k \geqslant 1$, $0 < r < M$. Матрицу X построим следующим образом. Пусть каждая из подматриц X_j представляет собой латинский квадрат, построенный на множестве $\{(j-1)M + 1, (j-1) \times$ $\times M + 2, \ldots, jM\}$, $1 \leqslant j \leqslant k - 1$. Пусть подматрица X_k представляет собой латинский квадрат, построенный на множестве $\{(k-1)M + 1,$ $(k-1)M + 2, \ldots, (k-1)M + r, kM + r + 1, kM + r + 2, \ldots$ $\ldots, (k+1)M\}$, а подматрица X_{k+1} — латинский квадрат, построенный на множестве $\{(k-1)M + r + 1, (k-1)M + r + 2, \ldots, kM + r\}$.

Если в некоторой строке L, $1 \leqslant L \leqslant M$, подматрицы X_k расположен элемент, равный $kM + r + u$, $1 \leqslant u \leqslant M - r$, заменим его на элемент, расположенный в этой же строке подматрицы X_{k+1} в столбце с номером $kM + r + u$. После того, как подматрица не будет содержать элементов, больших n, положим $f_{x_{Lq}, L}(s_2^*) = q$, $q = \overline{1, n}$, $L = \overline{1, M}$.

При расписании s_2^*, определяемом матрицей $\|f_{iL}(s_2^*)\|$, ровно M требований обслуживаются к каждому моменту времени jM, $1 \leqslant j \leqslant k - 1$, и к моменту времени $kM + r$. Кроме того, r требований обслуживаются к моменту времени kM. Следовательно, расписание s_2^* — оптимально. Отметим, что это расписание будет также оптимальным по быстродействию.

Трудоемкость построения расписаний s_1^* и s_2^* составляет $O(nM)$ операций.

2. Рассмотренная выше ситуация допускает естественное обобщение. Каждому требованию $i \in N$ сопоставим «вес» $v_i > 0$ и укажем способ

построения расписания s^*, которому соответствует наименьшее значение взвешенного суммарного времени обслуживания $\sum_{i \in N} v_i f_i(s)$. Пронумеруем требования таким образом, что $v_i \geqslant v_{i+1}$, $i = \overline{1, n-1}$.

Известно (см., например, [6]), что для любой последовательности $y_1, y_2, \ldots, y_n$ неотрицательных чисел линейная форма $\sum_{i=1}^{n} v_i y_{j_i}$ достигает наименьшего значения, если $y_{j_1} \leqslant y_{j_2} \leqslant \ldots \leqslant y_{j_n}$. Следовательно, расписание s^* следует искать среди таких расписаний s, при которых последовательность $f_1(s), f_2(s), \ldots, f_n(s)$ моментов завершения обслуживания требований является неубывающей.

Непосредственно из соотношения (2) и утверждения 3.Н.2.С. из [6] следует, что для получения расписания s^* достаточно перенумеровать требования таким образом, чтобы $v_i \geqslant v_{i+1}$, $i = \overline{1, n-1}$, и, пользуясь вышеописанным способом, построить расписание s_1^*. Трудоемкость построения s^* составляет $O(nM + n \log_2 n)$ операций.

Из приведенных рассуждений следует, что задача минимизации суммарного времени обслуживания в рассмотренной формулировке принадлежит к числу тех немногих задач теории расписаний, на сложность решения которых качественным образом влияет отсутствие нулевых длительностей обслуживания [7].

Автор выражает признательность В. С. Танаеву за полезные обсуждения.

Список литературы

1. Achugbue J. O., Chin F. Y. // SIAM J. Comput. 1982. V. 11. N 4. P. 709.
2. Liu C. Y., Bulfin R. L. // Oper. Res. Lett. 1985. V. 4. N 2. P. 71.
3. Gonzalez T. // Math. Oper. Res. 1982. V. 7. N 1. P. 57.
4. McNaughton R. // Manag. Sci. 1959. V. 6. N 1. P. 1.
5. Сачков В. Н. Комбинаторные методы дискретной математики. М., 1977.
6. Маршалл А., Олкин Н. Неравенства: теория мажоризации и ее приложения. М., 1983.
7. Hefetz N., Adiri I. // Nav. Res. Log. Quart. 1982. V. 29. N 3. P. 535.

Поступила в редакцию 27.03.86.

УДК 681.3.06

Г. А. ДРОБУШЕВИЧ, К. А. ЗУБОВИЧ

СИСТЕМА ФУНКЦИОНАЛЬНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ И ЕЕ РЕАЛИЗАЦИЯ ДЛЯ ЕС ЭВМ

В настоящее время общепризнано, что вопросы, связанные с разработкой программ, являются определяющими в программировании. Однако основной инструмент программиста — традиционные языки программирования — обладают многочисленными недостатками: примитивный (пословный) стиль программирования; непосредственная связь семантики с преобразованиями состояний; неспособность эффективного использования комбинирующих форм для построения новых программ из уже существующих; отсутствие полезных математических свойств для исследования программ [1]. Как следствие, предпринимаются попытки выработать стиль программирования, отличный от традиционного, основанный на использовании четко определенных средств построения программ и обладающий развитыми методами исследования программ, с целью облегчения разработки и повышения надежности программ. В данной статье предлагается система, которая базируется на идеях композиционного [2, 3] и функционального [1] подходов к программированию, а также описывается процесс ее реализации методами и средствами СР-техноло-