где $\hat{\varphi}(t_1+s)=A_1(t_1+s)\tilde{\varphi}(t_1-h+s)$, $s\in[-h,\ 0]$; $\hat{\varphi}$, очевидно, обладает теми же аналитическими свойствами, что и $\tilde{\varphi}$. В силу сделанной оговорки относительно плотности для каждых $\varepsilon>0$, функции q найдется функция $\tilde{\varphi}$, а следовательно, и $\hat{\varphi}$ такая, что из (19), согласно неравенству Коши — Буняковского, следует неравенство из (3). Равенство из (3) следует в силу (18).

Теорема доказана.

Список литературы

1. Марченко В. М. // Докл. АН БССР. 1977. Т. 236. № 5. С. 1083.
2. Шкляр Б. Ш. Там же. 1979. Т. 248. № 3. С. 549.
3. Jacobs M. Q., Langenhop C. E. // SIAM J. Control and Optimization. 1976. V. 14. № 6. P. 1009.
4. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1972.
5. Смирнов В. И. Курс высшей математики. М., 1974. Т. 4. Ч. 1. С. 336.

Поступила в редакцию 10.03.86.

УДК 519.852

Л. А. САВЕЛОВА

КОРРЕКТИРОВКА НАПРАВЛЕНИЯ В КОНЕЧНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ИНТЕРВАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ КВАДРАТИЧНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Рассмотрим задачу

$$f(x)=c'x+x'Dx/2\to\min,\ b_*\leqslant Ax\leqslant b^*,\ d_*\leqslant x\leqslant d^*, \tag{1}$$

где $A=A(I,\ J)$ — $m\times n$-матрица; $m\leqslant n$, $I=\{1,\ \dots,\ m\}$, $J=\{1,\ 2,\ \dots,\ n\}$, $D=D(J,\ J)$ — $n\times n$-матрица; $D=D'\geqslant 0$.

При создании конечного метода [1] решения задачи (1) возникает задача: построить новый опорный план $\{x,\ K_{\text{оп}}\}$, такой что $\beta(x,\ \bar{K}_{\text{оп}})\leqslant\beta(x,\ K_{\text{оп}})-\eta$, $\eta>0$. В данной работе предлагается метод решения этой задачи с помощью процедуры корректировки подходящего направления. Здесь $\beta=\beta(x,\ K_{\text{оп}})$ — оценка субоптимальности, допускающая разложение: $\beta(x,\ K_{\text{оп}})=\beta(x)+\beta(K_{\text{оп}})$, где $\beta(x)$ — мера неоптимальности опорного плана; $\beta(K_{\text{оп}})$ — мера неоптимальности опоры $K_{\text{оп}}$ [2].

Пусть, согласно методу [1], построен опорный план задачи (1) $\{\tilde{x},\ K^*_{\text{оп}}\}$, $\beta(\tilde{x},\ K^*_{\text{оп}})>\varepsilon$, где $\tilde{x}=x+\theta^{(1)}\tilde{l}^*$. Направление $\tilde{l}^*$ и опора $K^*_{\text{оп}}=\{K_0,\ K^*_{\text{ц}},\ K^*_{+}\}$ построены по решению производной задачи [1]. Через $\bar{j}_1$ обозначим номер строки или столбца, на котором достигается шаг $\theta^{(1)}$.

Исходя из этой информации построим множества: $K_{(0)}=\{I_{(0)},\ J_{(н)}\}$;

$I_{(0)}=\{i\in I_0\setminus I^*_{\text{ц}}\colon\ y^*_i=0,\ \ \alpha_i=0\}$, $\ J_{(н)}=\{j\in J_{\text{н}}\setminus J^*_{\text{ц}}\colon\ \ \Delta^*_j=0,\ \alpha_j=0\}$,

где α_i, α_j получены из (2), (3).

$$\alpha_i=H_{11}(i,\ i)-[H_{21}(i,\ J_{\text{ц}})H^{-1}_{\text{ц}}(J_{\text{ц}},\ J_{\text{ц}})H_{12}(J_{\text{ц}},\ i)+$$
$$+2H_{21}(i,\ J_{\text{ц}})H^{-1}_{\text{ц}}(J_{\text{ц}},\ I_{\text{ц}})H'_{21}(I_{\text{ц}},\ i)+H_{11}(i,\ I_{\text{ц}})H^{-1}_{\text{ц}}(I_{\text{ц}},\ I_{\text{ц}})H_{11}(I_{\text{ц}},\ i)]; \tag{2}$$
$$H_{11}(I_0,\ I_0)=(A^{-1}_{\text{оп}})'D(J_0,\ J_0)A^{-1}_{\text{оп}};$$
$$H^{-1}_{\text{ц}}(I_{\text{ц}},\ I_{\text{ц}})=H^{-1}_{11}(I_{\text{ц}},\ I_{\text{ц}});\ H^{-1}_{\text{ц}}(J_{\text{ц}},\ J_{\text{ц}})=-H^{-1}_{22}H_{21}H^{-1}_{11},$$
$$\alpha_j=H_{22}(j,\ j)-[H_{22}(j,\ J_{\text{ц}})H^{-1}_{\text{ц}}(J_{\text{ц}},\ J_{\text{ц}})H_{22}(J_{\text{ц}},\ j)+$$
$$+2H_{21}(j,\ J_{\text{ц}})H^{-1}_{\text{ц}}(J_{\text{ц}},\ I_{\text{ц}})H'_{21}(I_{\text{ц}},\ j)+H_{21}(j,\ I_{\text{ц}})H^{-1}_{\text{ц}}(I_{\text{ц}},\ I_{\text{ц}})H'_{21}(I_{\text{ц}},\ j)]. \tag{3}$$

Здесь матрицы

$H_{21}(J_{\text{н}},\ I_0)=H'_{12}(I_0,\ J_{\text{н}})=(A^{-1}_{\text{оп}})'D(J_0,\ J_{\text{н}})-(A^{-1}_{\text{оп}})'D(J_0,\ J_0)A^{-1}_{\text{оп}}A(I_0,\ J_{\text{н}})$;

$$H_{22}(J_н, J_н) = D(J_н, J_н) - A'(I_0, J_н)(A_{оп}^{-1})' D(J_0, J_н) - \tag{4}$$
$$- D(J_н, J_0) A_{оп}^{-1} A(I_0, J_н) - A'(I_0, J_н)(A_{оп}^{-1})' D(J_0, J_0) A_{оп}^{-1} A(I_0, J_н).$$

Далее, полагая $\bar{\mu}_1 = \mu_1 = \operatorname{sign} \tilde{l}^*_{j_1}$ при $\bar{j}_1 = j_1 \in J_0$, $\bar{\mu}_1 = \xi_1 s \operatorname{sign} \tilde{\omega}_{i_1}$ при $\bar{j}_1 = i_1 \in I_н$ [2], выберем параметр $\eta > 0$. Начиная с данных: $s = 1$, $K^*_{оп}$, $K_{(н)} = K^{(0)}_{н0} = K_{(0)}$, $\theta^{(s)} = \theta^{(1)}$, $x^{(s)} = x^{(1)}$, $l^{(s)} = \tilde{l}^*$, $\bar{j}_0 = \varnothing$, $\bar{\mu}_s = \bar{\mu}_1$, $\bar{j}_s = \bar{j}_1$, $\beta_s = \beta(\tilde{x}, K^*_{оп})$, осуществим приведенную ниже процедуру корректировки направления, которая строит новый опорный план $\{\bar{x}, \bar{K}_{оп}\}$ с требуемыми свойствами.

Пусть на шаге s известны: число s, параметр

$$\eta > 0,\ K_{оп} = \{K_0, K_ц, K_+\},\ K_{(н)},\ K^{(к)}_{нб},\ k = \overline{1, s-1};\ K^{(s-1)}_{н0}; \tag{5}$$

векторы $z_k(K^{(к)}_{нб})$, $k = \overline{1, s-1}$, план $x^{(s)}$, направление $l^{(s)}$, числа $\bar{j}_0$, $\bar{j}_k$, $\bar{\mu}_k$, $k = \overline{1, s}$; β_s, $\theta^{(s)}$.

Возможны следующие случаи:

1) $\bar{j}_s = j_s$, $j_s \in J_ц$, $K^{(s-1)}_{н0} = \varnothing$, $\bar{j}_s \bar{\in} \{\bar{j}_1, \ldots, \bar{j}_{s-1}\}$,

2) $\bar{j}_s = j_s$, $j_s \in J_ц$, $K^{(s-1)}_{н0} \neq \varnothing$, $\bar{j}_s \bar{\in} \{\bar{j}_1, \ldots, \bar{j}_{s-1}\}$,

3) $\bar{j}_s = j_0$, $j_0 \in J_0$, $K^{(s-1)}_{н0} = \varnothing$, $\bar{j}_s \bar{\in} \{\bar{j}_1, \ldots, \bar{j}_{s-1}\}$,

4) $\bar{j}_s = j_0$, $j_0 \in J_0$, $K^{(s-1)}_{н0} \neq \varnothing$, $\bar{j}_s \bar{\in} \{\bar{j}_1, \ldots, \bar{j}_{s-1}\}$,

5) $\bar{j}_s = i_s$, $i_s \in I_ц$, $K^{(s-1)}_{н0} = \varnothing$, $\bar{j}_s \bar{\in} \{\bar{j}_1, \ldots, \bar{j}_{s-1}\}$,

6) $\bar{j}_s = i_s$, $i_s \in I_ц$, $K^{(s-1)}_{н0} \neq \varnothing$, $\bar{j}_s \bar{\in} \{\bar{j}_1, \ldots, \bar{j}_{s-1}\}$,

7) $\bar{j}_s = i_н$, $i_н \in I_н$, $K^{(s-1)}_{н0} = \varnothing$, $\bar{j}_s \bar{\in} \{\bar{j}_1, \ldots, \bar{j}_{s-1}\}$,

8) $\bar{j}_s = i_н$, $i_н \in I_н$, $K^{(s-1)}_{н0} \neq \varnothing$, $\bar{j}_s \bar{\in} \{\bar{j}_1, \ldots, \bar{j}_{s-1}\}$,

9) $\bar{j}_s \in \{\bar{j}_1, \ldots, \bar{j}_{s-1}\}$.

Для иллюстрации процедуры корректировки рассмотрим случаи 1) и 9).

Случай 1). При $s = 1$ заканчиваем корректировку на опорном плане $\{\bar{x}, K^+_{оп}\}$, $\bar{x} = x^{(1)}$, $K^+_{оп} = K_{оп}$, $\bar{j}_* = j_1$, $\bar{\mu}_* = \mu_1$, $\gamma(0) = -\mu_1(1 - \theta^{(1)}) l^{(1)}_{j_1}$.

При $s > 1$ полагаем: $z_s(J_н) = \mu_s e_{j_s}[H^{-1}_{22}(J_ц, J_ц) H_{22}(J_ц, J_{(н)}) + H^{-1}_{21}(J_ц, I_ц) H'_{21}(J_{(н)}, I_ц)]$; $z_s(I_{(0)}) = \mu_s e_{j_s}[H^{-1}_{22}(J_ц, J_ц) H_{21}(J_ц, I_{(0)}) + H^{-1}_{21}(J_ц, I_ц) H_{11}(I_ц, I_{(0)})]$, где матрицы H^{-1}_{22}, H^{-1}_{21}, H_{22}, H_{21}, H_{11} найдены по формулам (4).

Вычислим двойственные шаги вдоль направления $z_s(K^{(k)}_{нб})$: $\sigma(j) = -z_k(j)/z_s(j)$, если $z_k(j) z_s(j) < 0$, $\sigma(j) = \infty$, если $z_k(j) z_s(j) \geqslant 0$, $j \in K^{(k)}_{нб}$. При каждом k, $k = \overline{1, s-1}$, конечные элементы множества $\{\sigma(j),\ j \in K^{(k)}_{нб}\}$ упорядочим по возрастанию $\sigma(\bar{j}_1, k) \leqslant \sigma(\bar{j}_2, k) \leqslant \ldots \leqslant \sigma(\bar{j}_{p_k}, k)$. Полагаем $\alpha(0, s-1) = -\mu_s(1 - \theta^{(s)}) l^{(s)}_{j_s}$ и находим числа $\alpha(i, k)$, $i = \overline{1, p_k}$, $k = \overline{1, s-1}$: $\alpha(i, k) = \alpha(i-1, k) + \Delta\alpha(i, k)$, где $\Delta\alpha(i, k) = |z_s(\bar{j}_i, k)|(d^*_{\bar{j}_i, k} - d_{*\bar{j}_i, k})$ при $\bar{j}_i \in J_{(н)}$, $\Delta\alpha(i, k) = |z_s(\bar{j}_i, k)|(b^*_{\bar{j}_i, k} - b_{*\bar{j}_i, k})$ при $\bar{j}_i \in I_{(0)}$.

Если $\alpha(p_1, 1) \geqslant 0$, то отметим такие числа ν, s_*, что $\alpha(\nu, s_*) \geqslant 0$, $\alpha(\nu - 1, s_*) < 0$. При $\bar{j}_{\nu, s_*} = j_{\nu, s_*}$ полагаем $\tilde{J}_ц = (J_ц \setminus j_s) \cup j_{\nu, s_*}$ и продолжаем корректировку с данными:

$$s_*,\ \tilde{K}_{оп} = \{K_0, \tilde{K}_ц, K_+\},\ \tilde{K}_ц = \{I_ц, \tilde{J}_ц\},\ \tilde{K}_{(н)} = \{I_{(0)}, \tilde{J}_{(н)}\},$$

$$\tilde{J}_{(н)} = (J_{(н)} \setminus j_{\nu, s_*}) \cup j_s,\ \tilde{I}_{(0)} = I_{(0)};\ K^{(k)}_{нб},\ k = \overline{1, s_* - 1};$$

$$\widetilde{K}_{\text{н0}}^{(s_*-1)} = \{\widetilde{I}_{00}^{(s_*-1)},\ \widetilde{J}_{\text{н0}}^{(s_*-1)}\},\ \widetilde{J}_{\text{н0}}^{(s_*-1)} = \widetilde{J}_{(\text{н})} \bigcup_{k=1}^{s_*-1} J_{\text{нб}}^{(k)}, \tag{6}$$

$$\widetilde{I}_{00}^{(s_*-1)} = \widetilde{I}_{(0)} \bigcup_{k=1}^{s_*-1} I_{\text{об}}^{(k)},\ k = \overline{1, s_*-1};\ \widetilde{l}^{(s_*)} = l^{(s)},\ \overline{j}_0,\ \overline{j}_k,\ \overline{\mu}_k,\ k = \overline{1, s_*}.$$

При $\overline{j}_{\nu, s_*} = i_{\nu, s_*}$ полагаем $\widetilde{J}_{\text{ц}} = J_{\text{ц}} \setminus j_s$, $\widetilde{I}_{\text{ц}} = I_{\text{ц}} \cup i_{\nu, s_*}$, $\widetilde{J}_{(\text{н})} = J_{(\text{н})} \cup j_s$, $\widetilde{I}_{(0)} = I_{(0)} \setminus i_{\nu, s_*}$ и продолжаем корректировку с данными (6). Если $\alpha(p_1, 1) < 0$, то строим множества:

$$J_+^{(s)} = \{j \in J_{\text{нн}}\colon l_j^{(s)} = d_j^* - x_j^{(s)}\},\ J_-^{(s)} = \{j \in J_{\text{нн}}\colon l_j^{(s)} = d_{*j} - x_j^{(s)}\},$$

$$J_* = \{\overline{j}_{i,k}\colon \overline{j}_{i,k} = j_{i,k},\ i = \overline{1, p_k},\ k = \overline{1, s-1}\},\ J_+^{\dagger} = (J_+^{(s)} \setminus J^*) \cup (J_-^{(s)} \cap J^*),$$

$$I_+^{(s)} = \{i \in I_{\text{он}}\colon \omega_i^{*(s)} = b_i^* - a_i' x^{(s)}\},\ I_-^{(s)} = \{i \in I_{\text{он}}\colon \omega_{*i}^{(s)} = b_{*i} - a_i' x^{(s)}\},$$

$$I^* = \{\overline{j}_{j,k}\colon \overline{j}_{j,k} = i_{j,k},\ j = \overline{1, p_k},\ k = \overline{1, s-1}\},\ I_+^{\dagger} = (I_+^{(s)} \setminus I^*) \cup (I_-^{(s)} \cap I_*).$$

Заканчиваем корректировку на опорном плане $\{\overline{x},\ K_{\text{оп}}^+\}$: $\overline{x} = x^{(s)}$, $K_{\text{оп}}^+ = \{K_0,\ K_{\text{ц}},\ K_+^{\dagger}\}$, $K_+^{\dagger} = \{I_+^{\dagger},\ J_+^{\dagger}\}$, $\overline{j}_* = j_s$, $\overline{\mu}_* = \mu_s$.

Случай 9). Заканчиваем корректировку построением нового плана: $\{\overline{x},\ \overline{K}_{\text{оп}}\}$, $\overline{x} = x^{(s)}$, $\overline{K}_{\text{оп}} = K_{\text{оп}}$. При этом обязательно $\beta(\overline{x},\ \overline{K}_{\text{оп}}) \leqslant \beta(x^{(1)},\ K_{\text{оп}}) - \eta$.

Теорема. При любых исходных данных процедура корректировки решает задачу за конечное число шагов.

Процедура корректировки для канонической задачи квадратичного программирования разработана О. И. Костюковой. Автор выражает благодарность О. И. Костюковой за возможность ознакомиться с ее результатом.

Список литературы

1. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Костюкова О. И. // Докл. АН СССР. 1985. Т. 280. № 3. С. 1020.
2. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Методы линейного программирования. Минск, 1980. Ч. 3.

Поступила в редакцию 12.11.85.

УДК 519.1

А. Г. ТАРНОВСКИЙ

ГРАДИЕНТНЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ «МИНИМУМ СУММЫ КВАДРАТОВ»

Задано множество $I = \{1, \ldots, n\}$. Каждому $i \in I$ поставлено в соответствие число $a_i > 0$. Требуется найти $k < n$ подмножеств T_j множества I таких, что $\bigcup_{j=1}^{k} T_j = I$, $T_j \cap T_i = \varnothing$ для любых $j \neq i$ и

$$c = \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i \in T_j} a_i \right)^2 \to \min. \tag{1}$$

Поставленная задача является NP трудной [1]. ε-приближенный алгоритм ее решения предложен в [2], приближенный со следующей оценкой относительной погрешности:

$$1/24 \geqslant \Delta \geqslant \begin{cases} 1/38, & k \text{ четно}, \\ 2/81, & k = 3, \\ 1/36 - 1(36 * k), & k \geqslant 5 \text{ и нечетно} \end{cases}$$