Список литературы

1. Иоффе А. Д. // Докл. АН СССР. 1970. Т. 195. № 5. С. 1018.
2. Chatelain J. // C. R. Acad. Sci. 1976. T. 238, A763.
3. Kozek A. // Rocz. Pol. tow. mat. 1977. T. 19. S. 259.
4. Красносельский М. А. и Рутицкий Я. Б. Выпуклые функции и пространства Орлича. М., 1958.
5. Канторович Л. В. и Акилов Г. П. Функциональный анализ. М., 1984.
6. Musielak J. Orlicz spaces and modular spaces. Berlin; Heidelberg; New York; Tokyo, 1983.
7. Данфорд Н. и Шварц Дж. Линейные операторы. Общая теория. М., 1962.

Поступила в редакцию 05.12.85.

УДК 517.977

Л. Е. ЗАБЕЛЛО

К ИССЛЕДОВАНИЮ ПРИБЛИЖЕННОЙ НУЛЬ-УПРАВЛЯЕМОСТИ В ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМАХ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Исследуется одна из задач приближенной нуль-управляемости в линейных нестационарных системах с запаздыванием. Основной результат (построение разрешающего задачу управления) опирается на спектральные свойства ядра интегрального уравнения Фредгольма I рода, что сближает предлагаемый подход исследования с основным методом исследования управляемости и наблюдаемости линейных стационарных систем [1—3].

1. Рассмотрим систему

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t)+A_1(t)x(t-h)+B(t)u(t)+g(t),\ t\in[t_0,\ t_1]=T, \quad (1)$$

с начальным условием

$$x_0(\cdot)=\{x(t_0)=x_0,\ x(\tau)=\varphi(\tau),\ \tau\in[t_0-h,\ t_0)\}, \quad (2)$$

где x — n-вектор положения системы; u — m-вектор управления из класса кусочно-непрерывных функций на T, $(u(\cdot)\in\tilde{C}(R^n,\ T))$, которое будем называть допустимым, $\varphi(\cdot)\in\tilde{C}(R^n,[t_0-h,\ t_0])$, $g(\cdot)\in\tilde{C}(R^n,\ T)$ — заданные; $A(\cdot),\ A_1(\cdot)\in C(R^{n\times n},\ T)$, $B(\cdot)\in C(R^{n\times n},\ T)$; $u(t)\equiv 0$, $t>t_1-h$, $h>0$ — постоянное запаздывание.

Определение 1. Систему (1) назовем приближенно нуль-управляемой на T, если для любого начального состояния (2) и любого $\varepsilon>0$ существует допустимое управление $u(t)=u(t,\ x_0(\cdot),\ \varepsilon)$, $t\in T$, для которого решение системы (1) удовлетворяет условиям

$$x(t_1-h)=0,\ \int_{-h}^{0}x'(t_1+s)\,x(t_1+s)\,ds\leqslant\varepsilon. \quad (3)$$

Пусть $F(t,\ \tau)$ — фундаментальная матрица системы (1),

$$\begin{gathered}\frac{\partial F(t,\ \tau)}{\partial\tau}=-F(t,\ \tau)\,A(\tau)-F(t,\ \tau+h)\,A_1(\tau+h),\ \tau<t,\\ F(t,\ t)=E,\ F(t,\ \tau)\equiv 0,\ \tau>t.\end{gathered} \quad (4)$$

Допустимое управление, обеспечивающее приближенную управляемость системы (1), будем искать в виде

$$u(t)=B'(t)\,[F'(t_1-h,\ t)\,l+\int_{-h}^{0}F'(t_1+s,\ t)\,l(s)\,ds,\ l\in R^n,$$
$$l(\cdot)\in L^2(R^n,\ [-h,\ 0]). \quad (5)$$

Запишем решение системы (1) при управлении (5) в форме Коши в момент t_1+s, $-h\leqslant s\leqslant 0$, используя теорему Фубини [4]:

$$x(t_1+s)=F(t_1+s,\ t_0)\,x_0+\int_{-h}^{0}F(t_1+s,\ t_0+h+\tau)A_1(t_0+h+\tau)\varphi(t_0+\tau)d\tau+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1+s} F(t_1+s,\ t)(B(t)u(t)+g(t))\,dt = p(s)+W(t_1-h,\ s)\,l+$$

$$+\int_{-h}^{0} W(t_1,\ s,\ r)\,l(r)\,dr, \tag{6}$$

$$p(s)=F(t_1,\ s,\ t_0)\,x_0+\int_{-h}^{0} F(t_1+s,\ t_0+h+\tau)\,A_1(t_0+h+\tau)\,\varphi(t_0+\tau)d\tau+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1+s} F(t_1+s,\ \tau)\,q(\tau)\,d\tau,$$

$$W(t_1-h,\ s)=\int_{t_0}^{t_1+s} F(t_1+s,\ t)\,D(t)\,F'(t_1-h,\ t)\,dt,\ \ D(t)=B(t)\,B'(t),$$

$$W(t_1,\ s,\ r)=\int_{t_0}^{t_1+s} F(t_1+s,\ t)\,D(t)\,F'(t_1+r,\ t)\,dt.$$

Будем считать, что система (1) относительно управляема на $[t_0,\ t_1-h]$, т. е. существует матрица $W^{-1}(t_1-h,\ -h)$.

Задача 1. Указать условия, при которых допустимое управление, обеспечивающее выполнение (3), существует, и установить формулы для получения $\{l,\ l(\cdot)\}$. Положим

$$l=W^{-1}(t_1-h-h)-p(-h)-\int_{-h}^{0} W(t_1,\ -h,\ r)\,l(r)\,dr. \tag{7}$$

Очевидно, что независимо от $l(\cdot)$ при выбранном l из (6) следует $x(t_1-h)=0$. Осталось подобрать нужным образом $l(\cdot)$. С этой целью подставим (7) в (6); имеем:

$$x(t_1+s)=p(s)-W(t_1-h,\ \ s)\,W^{-1}(t_1-h,\ \ -h)\,p(-h)+\int_{-h}^{0}(W(t_1,s,\ r)-$$

$$-W(t_1-h,\ s)\,W^{-1}(t_1-h,\ -h)\,W(t_1,\ -h,\ r))\,l(r)\,dr=\bar{p}(s)+$$

$$+\int_{-h}^{0}\overline{W}(t_1,s,\ r)\,l(r)\,dr, \tag{8}$$

$$\bar{p}(s)=p(s)-W(t_1-h,\ s)\,W^{-1}(t_1-h,\ -h)\,p(-h),$$

$$\overline{W}(t_1,\ s,\ r)=W(t_1,\ s,\ r)-W(t_1-h,\ s)\,W^{-1}(t_1-h,\ -h)\,W(t_1,\ -h,\ r).$$

Ядро $\overline{W}(t_1,\ s,\ r)$ является непрерывным, симметричным по $s,\ r$. Покажем, что при выполнении условия

$$\gamma(t,\ g,\ g(\cdot))=(g'\,F(t_1-h,\ t)+\int_{-h}^{0} g'(s)\,F(t_1+s,\ t)\,ds)\,B(t)\neq 0,$$

$$t\in[t_0,\ t_1-h], \tag{9}$$

для любого $g\in R^n,\ g(\cdot)\in L^2(R^n,\ [-h,\ 0]),\ g'g+\int_{-h}^{0} g'(s)\,g(s)\,ds\neq 0,$ ядро $\overline{W}(t_1,\ s,\ r)$ является полным. С этой целью убедимся, что уравнение $\int_{-h}^{0}\overline{W}(t_1,\ s,\ r)\,\bar{l}(r)\,dr=0$ имеет только тривиальное решение. Предположим противное, т. е. существует $\bar{l}^0(\cdot),\ \|\bar{l}^0(\cdot)\|_{L^2}\neq 0$, для которого

$$0=\int_{-h}^{0}\overline{W}(t_1,\ s,\ r)\,\bar{l}^0(r)dr,\ \ s\in[-h,\ 0]. \tag{10}$$

Умножим (10) слева на $\bar{l}^0(s)$ и, полагая $\bar{l}^0 = -\int\limits_{-h}^{0} W^{-1}(t_1-h, -h) W(t_1-h, r)\bar{l}^0(r)\,dr$, получим, интегрируя по s:

$$0 = \int\limits_{-h}^{0} \bar{l}^{0\prime}(s) \int\limits_{-h}^{0} \overline{W}(t_1, s, r)\bar{l}^0(r)\,dr = -\int\limits_{-h}^{0} \bar{l}^{0\prime}(s) W(t_1-h, s)\,ds \times$$

$$\times \int\limits_{-h}^{0} W(t_1-h, -h) W(t_1-h, r)\bar{l}^0(r)dr + \int\limits_{-h}^{0}\int\limits_{-h}^{0} \bar{l}^{0\prime}(s) W(t_1, s, r)\, l(r)\,dsdr =$$

$$= \bar{l}^{0\prime} W(t_1-h, -h)\bar{l}^0 + 2\bar{l}^{0\prime} \int\limits_{-h}^{0} W'(t_1-h, s)\bar{l}^0(s)\,ds + \int\limits_{-h}^{0}\int\limits_{-h}^{0} \bar{l}^{0\prime}(s) \times$$

$$\times W(t_1, s, r)\bar{l}^0(r)\,dsdr = \int\limits_{t_0}^{t_1-h} \gamma(t, \bar{l}^0, \bar{l}^0(\cdot))\,\gamma'(t, \bar{l}^0, \bar{l}^0(\cdot))\,dt.$$

Однако это невозможно в силу предположения (9).

Теорема 1. Для приближенной нуль-управляемости системы (1) необходимо и достаточно выполнения условия (9).

Доказательство. *Необходимость.* Пусть система (1) приближенно нуль-управляема на T, а условие (9) не выполняется для некоторого единичного элемента $\{g^0, g^0(\cdot)\}$. Тогда из (6) имеем при $x_0(\cdot) = 0$ следующее выражение (с учетом сделанного предположения) при достаточно малом $\varepsilon^0 > 0$:

$$\varepsilon^0 \geqslant \int\limits_{-h}^{0} g^{0\prime}(s)\, x(t_1+s)\,ds = \int\limits_{-h}^{0} g^{0\prime}(s) \int\limits_{t_0}^{t_1+s} F(t_1+s, t)\, q(t)\,dt\,ds +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t_1-h} g^{0\prime} F(t_1-h, t)\, q(t)\,dt = (q(t)\equiv 0,\ t > t_1-h) =$$

$$= \int\limits_{-h}^{0} g^{0\prime}(s) \int\limits_{t_0}^{t_1-h} F(t_1+s, t)\, q(t)\,dt\,ds + \int\limits_{t_0}^{t_1-h} g^{0\prime} F(t_1-h, t)\, q(t)\,dt =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_1-h} \left(\int\limits_{-h}^{0} g^{0\prime}(s) F(t_1+s, t)\,ds + g^{0\prime} F(t_1-h, t) \right) q(t)\,dt. \qquad (11)$$

В силу произвольности $q(t)$, $t \in [t_0, t_1-h]$, неравенство (11) будет иметь место лишь при условии

$$\int\limits_{-h}^{0} g^{0\prime}(s) F(t_1+s, t)\,ds + g^{0\prime} F(t_1-h, t) \equiv 0,\ t \in [t_0, t_1-h]. \qquad (12)$$

Из (12) получаем

$$-g^{0\prime} = \int\limits_{-h}^{0} g^{0\prime}(s) F(t_1+s, t_1-h)\,ds. \qquad (13)$$

Рассмотрим (11) при $q(t) \equiv 0$, $t \in [t_0, t_1-h]$. Имеем

$$\varepsilon^0 \geqslant \int\limits_{-h}^{0} g^{0\prime}(s)\, x(t_1+s)\,ds = \int\limits_{-h}^{0} g^{0\prime}(s) F(t_1+s) \int\limits_{t_1-h}^{t_1+s} F^{-1}(t)\, q(t)\,dtds, \qquad (14)$$

где $F(t)$ удовлетворяет уравнению $\frac{d}{dt}F(t) = A(t)F(t)$, $F(t_0) = E$, $t \in T$, так как множество

$$Q(R^n, [-h, 0]) = \left\{ \xi(s) : \xi(s) = \int\limits_{-h}^{s} F^{-1}(t_1+\tau)\, q(t_1+\tau)\,d\tau,\ q(t_1+\cdot) \in \right.$$

$$\in \tilde{C}(R^n, [-h, 0])\Big\}$$

всюду плотно в пространстве $L^2(R^n, [-h, 0])$, то неравенство (14) в силу невырожденности $F(t_1+s)$, $s\in[-h, 0]$, выполняется лишь при условии $\|g(\cdot)\|_{L^2}=0$. Из последнего равенства и (13) следует $g^0=0$. Получили противоречие предположению относительно $\{g^0, g^0(\cdot)\}$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $p_k(s)$, $s\in[-h, 0]$, λ_k, $k=1, 2, \ldots,$ — собственные функции и значения ядра $\overline{W}(t_1, s, r)$ интегрального уравнения Фредгольма I рода соответственно. Отметим, что система собственных функций симметричного полного ядра $\overline{W}(t_1, s, r)$ полна (замкнута) [5] в $L^2(R^n, [-h, 0])$. Это означает, что для любого $\varepsilon>0$ найдутся числа α_k, $k=1, 2, \ldots$, такие, что при некотором конечном $N=N(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$\Big\|\bar{p}(\cdot)-\sum_{k=1}^{N}\alpha_k p_k(\cdot)\Big\|_{L^2}\leqslant\varepsilon. \tag{15}$$

В соотношении (8) положим

$$l(r)=-\sum_{k=1}^{N}\alpha_k\lambda_k^{-1}p_k(r),\quad r\in[-h, 0], \tag{16}$$

и, воспользовавшись (15), получим следующую оценку:

$$\|x(t_1+\cdot)\|_{L^2}=\Big\|\bar{p}(\cdot)-\int_{-h}^{0}\overline{W}(t_1, \cdot, r)\sum_{k=1}^{N}\alpha_k\lambda_k^{-1}p_k(r)\,dr\Big\|_{L^2}=$$
$$=\Big\|\bar{p}(\cdot)-\sum_{k=-}^{N}\alpha_k\lambda_k^{-1}\int_{-h}^{0}\overline{W}(t_1, \cdot, r)p_k(r)\,dr\Big\|_{L^2}=\Big\|\bar{p}(\cdot)-$$
$$-\sum_{k=1}^{N}\alpha_k p_k(\cdot)\Big\|_{L^2}\leqslant\varepsilon. \tag{17}$$

Из (17) следует достаточность. Теорема доказана.

Следствие 1. Если выполнено условие (9), то управление (5), (7), (16) разрешает задачу 1.

2. Дадим достаточное условие в разрешимости задачи 1, выраженное через параметры системы (1).

Теорема 2. Система (1) приближенно нуль-управляема на T, если выполнены условия:

$$\operatorname{rank}B(t)=n,\quad t\in[t_1-2h, t_1-h],$$
$$\operatorname{rank}A_1(t)=n,\quad t\in[t_1-h, t_1],$$
$$A_1(\cdot)\in\tilde{C}^{(1)}(R^n, [t_1-2h, t_1-h]).$$

Доказательство. Пусть $\tilde{\varphi}(\cdot)\in\tilde{C}^{(1)}(R^n, [t_1-2h, t_1-h])$, $\tilde{\varphi}(t_1-h)=0$. Множество таких функций плотно в $\tilde{C}(R^n, [t_1-2h, t_1-h])$. Положим

$$u(t)=\begin{cases}-B^{-1}(t)(A(t)x(t)+A_1(t)x(t-h)+q(t)+\tilde{\varphi}(t)),\ t\in[t_1-2h,\\ t_1-h],\ 0,\ t<t_1-2h.\end{cases}$$

Имеем

$$\dot{x}(t)=-\dot{\tilde{\varphi}}(t),\quad t\in[t_1-2h, t_1-h], \tag{18}$$

отсюда следует

$$x(t)=\int_{-h}^{0}F(t, t_1+s)(\hat{\varphi}(t_1+s)+q(t_1+s))\,ds,\quad t\in[t_1-h, t_1], \tag{19}$$

где $\hat{\varphi}(t_1 + s) = A_1(t_1 + s)\tilde{\varphi}(t_1 - h + s)$, $s \in [-h, 0]$; $\hat{\varphi}$, очевидно, обладает теми же аналитическими свойствами, что и $\tilde{\varphi}$. В силу сделанной оговорки относительно плотности для каждых $\varepsilon > 0$, функции q найдется функция $\tilde{\varphi}$, а следовательно, и $\hat{\varphi}$ такая, что из (19), согласно неравенству Коши — Буняковского, следует неравенство из (3). Равенство из (3) следует в силу (18).

Теорема доказана.

Список литературы

1. Марченко В. М. // Докл. АН БССР. 1977. Т. 236. № 5. С. 1083.
2. Шкляр Б. Ш. Там же. 1979. Т. 248. № 3. С. 549.
3. Jacobs M. Q., Langenhop C. E. // SIAM J. Control and Optimization. 1976. V. 14. № 6. P. 1009.
4. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1972.
5. Смирнов В. И. Курс высшей математики. М., 1974. Т. 4. Ч. 1. С. 336.

Поступила в редакцию 10.03.86.

УДК 519.852

Л. А. САВЕЛОВА

КОРРЕКТИРОВКА НАПРАВЛЕНИЯ В КОНЕЧНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ИНТЕРВАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ КВАДРАТИЧНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Рассмотрим задачу

$$f(x) = c'x + x'Dx/2 \to \min, \quad b_* \leqslant Ax \leqslant b^*, \quad d_* \leqslant x \leqslant d^*, \tag{1}$$

где $A = A(I, J)$ — $m \times n$-матрица; $m \leqslant n$, $I = \{1, \ldots, m\}$, $J = \{1, 2, \ldots \ldots, n\}$, $D = D(J, J)$ — $n \times n$-матрица; $D = D' \geqslant 0$.

При создании конечного метода [1] решения задачи (1) возникает задача: построить новый опорный план $\{x, K_{оп}\}$, такой что $\beta(x, \bar{K}_{оп}) \leqslant \leqslant \beta(x, K_{оп}) - \eta$, $\eta > 0$. В данной работе предлагается метод решения этой задачи с помощью процедуры корректировки подходящего направления. Здесь $\beta = \beta(x, K_{оп})$ — оценка субоптимальности, допускающая разложение: $\beta(x, K_{оп}) = \beta(x) + \beta(K_{оп})$, где $\beta(x)$ — мера неоптимальности опорного плана; $\beta(K_{оп})$ — мера неоптимальности опоры $K_{оп}$ [2].

Пусть, согласно методу [1], построен опорный план задачи (1) $\{\tilde{x}, K^*_{оп}\}$, $\beta(\tilde{x}, K^*_{оп}) > \varepsilon$, где $\tilde{x} = x + \theta^{(1)} \tilde{l}^*$. Направление $\tilde{l}^*$ и опора $K^*_{оп} = \{K_0, K^*_{ц}, K^*_{+}\}$ построены по решению производной задачи [1]. Через $\bar{j}_1$ обозначим номер строки или столбца, на котором достигается шаг $\theta^{(1)}$.

Исходя из этой информации построим множества: $K_{(0)} = \{I_{(0)}, J_{(н)}\}$;

$I_{(0)} = \{i \in I_0 \diagdown I^*_{ц}\colon\ y^*_i = 0,\ \ \alpha_i = 0\}$, $\quad J_{(н)} = \{j \in J_н \diagdown J^*_{ц}\colon\ \ \Delta^*_j = 0,\ \ \alpha_j = 0\}$,

где α_i, α_j получены из (2), (3).

$$\alpha_i = H_{11}(i, i) - [H_{21}(i, J_ц) H^{-1}_ц (J_ц, J_ц) H_{12}(J_ц, i) +$$
$$+ 2H_{21}(i, J_ц) H^{-1}_ц (J_ц, I_ц) H'_{21}(I_ц, i) + H_{11}(i, I_ц) H^{-1}_ц (I_ц, I_ц) H_{11}(I_ц, i)]; \tag{2}$$
$$H_{11}(I_0, I_0) = (A^{-1}_{оп})' D(J_0, J_0) A^{-1}_{оп};$$
$$H^{-1}_ц (I_ц, I_ц) = H^{-1}_{11}(I_ц, I_ц); \ H^{-1}_ц (J_ц, J_ц) = -H^{-1}_{22} H_{21} H^{-1}_{11},$$
$$\alpha_j = H_{22}(j, j) - [H_{22}(j, J_ц) H^{-1}_ц (J_ц, J_ц) H_{22}(J_ц, j) +$$
$$+ 2H_{21}(j, J_ц) H^{-1}_ц (J_ц, I_ц) H'_{21}(I_ц, j) + H_{21}(j, I_ц) H^{-1}_ц (I_ц, I_ц) H'_{21}(I_ц, j)]. \tag{3}$$

Здесь матрицы

$H_{21}(J_н, I_0) = H'_{12}(I_0, J_н) = (A^{-1}_{оп})' D(J_0, J_н) - (A^{-1}_{оп})' D(J_0, J_0) A^{-1}_{оп} A(I_0, J_н)$;