

УДК 513.88

П. П. ЗАБРЕЙКО, НГУЕН ХОНГ ТХАЙ

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ПРОСТРАНСТВ ОРЛИЧА ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ

Цель настоящей работы — предложить определение пространств Орлича L_M вектор-функций, охватывающее случай, когда порождающие эти пространства N -функции $M(s, u)$ имеют вырождения (т. е. обращаются в нуль на некоторых зависящих от s нетривиальных подпространствах для значений s , образующих множество положительной меры), и исследовать некоторые их геометрические свойства. Общепринятое определение пространств Орлича вектор-функций (см., например, [1—3]) аналогично определению пространств Орлича скалярных функций [4—6]; так как в скалярном случае рассматриваются только невырожденные N -функции (вырожденный случай тривиальным образом сводится к невырожденному), это обычное определение для пространств Орлича вектор-функций в общем случае приводит к полунормированным пространствам и для перехода к нормированным пространствам требуется некоторая дополнительная факторизация, зависящая от исходной N -функции $M(s, u)$. В настоящей работе и описывается эта факторизация.

1. Пусть (Ω, A, μ) — некоторые множества, σ -алгебра его подмножеств и неотрицательная σ -конечная и счетно аддитивная мера; пусть, кроме того, σ -алгебра A является полной относительно μ , атомы Ω являются точками, и μ_* — некоторая вероятностная (т. е. нормированная) мера на A , эквивалентная μ .

Функцию $M(s, u) : \Omega \times R^m \rightarrow [0, \infty]$ назовем N -функцией, если почти при всех $s \in \Omega$ она обращается в нуль при $u = 0$, является четной, выпуклой и полунепрерывной снизу по $u \in R^m$ и если, кроме того, она является измеримой на $\Omega \times R^m$ относительно σ -алгебры $A \times B$ (B — алгебра борелевских множеств в R^m). Для каждой N -функции $M(s, u)$ положим $O_M(s) = \{u : M(s, \lambda u) = 0 (\lambda > 0)\}$, $D_M(s) = \{u : M(s, u) < \infty\}$ и $L_M(s) = \bigcup_{\lambda > 0} \lambda D_M(s)$.

Двойственная к N -функции $M(s, u)$ N -функция $M^*(s, u^*)$ определяется равенством

$$M^*(s, u^*) = \sup_{u \in R^m} \{(u, u^*) - M(s, u)\},$$

где $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в R^m . Отметим равенство $M^{**}(s, u) = M(s, u)$. N -функцию $M(s, u)$ будем называть N_o -функцией, если она почти при всех $s \in \Omega$ является положительно однородной по $u \in R^m$. Для N_o -функции $M(s, u)$ верна формула

$$M^*(s, u^*) = \begin{cases} 0 & \text{при } M_o(s, u^*) \leq 1, \\ \infty & \text{при } M_o(s, u^*) > 1. \end{cases}$$

Здесь N_0 -функция $M_0(s, u^*)$ определяется равенством

$$M_0(s, u^*) = \sup \{ (u, u^*) : M(s, u) \leq 1 \}.$$

2. Как обычно (см., например, [5, 7]), через S обозначается полное метрическое линейное пространство всех измеримых на Ω вектор-функций со значениями в R^m (точнее, классов измеримых вектор-функций, совпадающих друг с другом почти всюду) с обычными алгебраическими операциями и с метрикой, порожденной квазинормой $\|x\|_S = \int_{\Omega} \|x(s)\| \times (1 + \|x(s)\|)^{-1} d\mu_*(s)$ (здесь $\|\cdot\|$ — евклидова норма на R^m). Сходимость в этом пространстве эквивалентна сходимости по мере μ_* . Пусть O_M — замкнутое подпространство функций S , для которых почти при всех $s \in \Omega$ справедливо включение $x(s) \in O_M(s)$. Два элемента x_1 и x_2 из S назовем M -эквивалентными, если $x_1 - x_2 \in O_M$. Фактор-пространство S_M пространства S по O_M состоит из классов M -эквивалентных друг другу элементов из S ; однако ниже элементы S_M называются функциями. Пространство S_M с обычными алгебраическими операциями и с метрикой, порожденной квазинормой

$$\|x\|_{S_M} = \inf \{ \|x + z\|_S : z \in O_M \},$$

является полным метрическим линейным пространством.

Принимающий на S значения из $[0, \infty]$ функционал $M(x) = \int_{\Omega} M(s, x(s)) d\mu(s)$ назовем аналогично скалярному случаю модуляром. Отметим, что модуляр M определен и на S_M (т. е. $M(x_1) = M(x_2)$, если x_1 и x_2 — M -эквивалентны), и что $M(\lambda x) = 0$ ($\lambda > 0$) в том и только том случае, когда почти при всех $s \in \Omega$ справедливо включение $x(s) \in O_M(s)$.

Обозначим через L_M множество функций из S_M , для которых при некотором $\lambda > 0$ справедливо неравенство $M(\lambda x) < \infty$, и определим на этом множестве два функционала

$$\|x\|_{M,\alpha} = \inf \{ \lambda > 0 : M(\lambda^{-1}x) \leq 1 \}, \quad (1)$$

$$\|x\|_{M,\beta} = \inf_{\lambda > 0} \lambda^{-1} (1 + M(\lambda x)). \quad (2)$$

Множество L_M с обычными алгебраическими операциями является линейным пространством, а функционалы (1) и (2) являются нормами на нем, причем справедливы неравенства

$$\|x\|_{M,\alpha} \leq \|x\|_{M,\beta} \leq 2\|x\|_{M,\alpha}.$$

Теорема 1. Пусть $M(s, u)$ — N -функция. Тогда пространство L_M непрерывно вложено в S_M и является банаховым.

3. В случае, когда N -функция $M(s, u)$ является N_0 -функцией нормы (1) и (2) в пространствах L_M и L_{M^*} совпадают соответственно с нормами $\|x\|_M = \int_{\Omega} M(s, x(s)) d\mu(s)$, $\|x^*\|_{M^*} = \text{ess sup}_{s \in \Omega} M_0(s, x^*(s))$. Эти про-

странства среди остальных пространств Орлича вектор-функций играют роль «максимальных» и «минимальных». Точное утверждение составляет

Теорема 2. Пусть $M(s, u)$ — N -функция. Тогда справедливы равенства $L_M = \bigcup_{W \in E(M)} L_{W^*} = \bigcap_{W \in E(M^*)} L_W$, где $E(M)$ — совокупность N_0 -функций

$W(s, u)$, для которых почти при всех $s \in \Omega$ справедливы соотношения $O_{M^*}(s) = O_M(s)$, $L_{W^*}(s) = L_M(s)$ и включение $L_{W^*} \subset L_M$.

Используя теоремы 1, 2, на рассматриваемые обобщенные пространства Орлича можно по стандартным схемам перенести все основные утверждения теории пространств Орлича: условия сепарабельности, теоремы об общих видах линейных непрерывных функционалов на них и т. д.

Список литературы

1. Иоффе А. Д. // Докл. АН СССР. 1970. Т. 195. № 5. С. 1018.
 2. Chatelain J. // C. R. Acad. Sci. 1976. Т. 238, A763.
 3. Kozek A. // Roczn. Pol. tow. mat. 1977. Т. 19. S. 259.
 4. Красносельский М. А. и Рутницкий Я. Б. Выпуклые функции и пространства Орлича. М., 1958.
 5. Канторович Л. В. и Акилов Г. П. Функциональный анализ. М., 1984.
 6. Musielak J. Orlicz spaces and modular spaces. Berlin; Heidelberg; New York; Tokyo, 1983.
 7. Данфорд Н. и Шварц Дж. Линейные операторы. Общая теория. М., 1962.
- Поступила в редакцию 05.12.85.

УДК 517.977

Л. Е. ЗАБЕЛЛО

К ИССЛЕДОВАНИЮ ПРИБЛИЖЕННОЙ НУЛЬ-УПРАВЛЯЕМОСТИ В ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМАХ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Исследуется одна из задач приближенной нуль-управляемости в линейных нестационарных системах с запаздыванием. Основной результат (построение разрешающего задачу управления) опирается на спектральные свойства ядра интегрального уравнения Фредгольма I рода, что сближает предлагаемый подход исследования с основным методом исследования управляемости и наблюдаемости линейных стационарных систем [1—3].

1. Рассмотрим систему

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + A_1(t)x(t-h) + B(t)u(t) + g(t), \quad t \in [t_0, t_1] = T, \quad (1)$$

с начальным условием

$$x_0(\cdot) = \{x(t_0) = x_0, x(\tau) = \varphi(\tau), \tau \in [t_0 - h, t_0]\}, \quad (2)$$

где x — n -вектор положения системы; u — m -вектор управления из класса кусочно-непрерывных функций на T , ($u(\cdot) \in \tilde{C}(R^m, T)$), которое будем называть допустимым, $\varphi(\cdot) \in \tilde{C}(R^n, [t_0 - h, t_0])$, $g(\cdot) \in \tilde{C}(R^n, T)$ — заданные; $A(\cdot), A_1(\cdot) \in C(R^{n \times n}, T)$, $B(\cdot) \in C(R^{n \times m}, T)$; $u(t) \equiv 0$, $t > t_1 - h$, $h > 0$ — постоянное запаздывание.

Определение 1. Систему (1) назовем приближенно нуль-управляемой на T , если для любого начального состояния (2) и любого $\varepsilon > 0$ существует допустимое управление $u(t) = u(t, x_0(\cdot), \varepsilon)$, $t \in T$, для которого решение системы (1) удовлетворяет условиям

$$x(t_1 - h) = 0, \quad \int_{-h}^0 x'(t_1 + s) x(t_1 + s) ds \leq \varepsilon. \quad (3)$$

Пусть $F(t, \tau)$ — фундаментальная матрица системы (1),

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(t, \tau)}{\partial \tau} &= -F(t, \tau) A(\tau) - F(t, \tau + h) A_1(\tau + h), \quad \tau < t, \\ F(t, t) &= E, \quad F(t, \tau) \equiv 0, \quad \tau > t. \end{aligned} \quad (4)$$

Допустимое управление, обеспечивающее приближенную управляемость системы (1), будем искать в виде

$$\begin{aligned} u(t) &= B'(t) [F'(t_1 - h, t) l + \int_{-h}^0 F'(t_1 + s, t) l(s) ds], \quad l \in R^n, \\ l(\cdot) &\in L^2(R^n, [-h, 0]). \end{aligned} \quad (5)$$

Запишем решение системы (1) при управлении (5) в форме Коши в момент $t_1 + s$, $-h \leq s \leq 0$, используя теорему Фубини [4]:

$$x(t_1 + s) = F(t_1 + s, t_0) x_0 + \int_{-h}^0 F(t_1 + s, t_0 + h + \tau) A_1(t_0 + h + \tau) \varphi(t_0 + \tau) d\tau +$$