Физика

УДК 530.12 : 531.51+530.13 : 531.62

А. И. ТИМОЩЕНКО

ФОРМУЛИРОВКА ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ ЭЙНШТЕЙНА В ВИДЕ ТЕОРИИ ПОЛЯ С НЕПОЛНОЙ ГЕОМЕТРИЗАЦИЕЙ В РИМАНОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ

В [1] показано, что теории тяготения с лагранжианами Эйнштейна и Розена в римановом и плоском пространствах-временах соответственно не дают удовлетворительного описания энергии-импульса гравитационного поля. В этой связи рассмотрим здесь теорию гравитации в римановом пространстве-времени с неполностью геометризованным гравитационным лагранжианом.

В [1] записаны законы эволюции, следующие из тождества Нетер, пригодные в пространствах-временах с произвольной линейной связностью и метрикой. В частном случае риманова пространства для системы взаимодействующих гравитационного и других полей при неполной геометризации лагранжиана гравитационного поля * закон эволюции канонического тензора энергии-импульса (ТЭИ) имеет вид:

$$\widetilde{\mathrm{Div}}_{\varkappa}\, t^{\lambda\varkappa} - \frac{4}{\sqrt{-g}} B^{(\lambda\varkappa)\cdot}{}_{\cdot\mu}\gamma_{\nu\varkappa}\left(\frac{\delta L_g}{\delta\gamma_{\mu\nu}}\right)_{\text{явн}} = 0, \tag{1}$$

где $\gamma_{\mu\nu}$ — плоская метрика, описывающая явную зависимость $\mathbf{L}_g$ от координат, $(\delta\mathbf{L}_g/\delta\gamma_{\mu\nu})_{\text{явн}}$ — соответствующая вариационная производная. Тензоры энергии-импульса Гильберта в случаях: $\mathbf{L} = \mathbf{L}_g$ и $\mathbf{L} = \mathbf{L}_m$ равны:

$$\underset{g}{\Theta}{}^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}}\left(\frac{\delta\mathbf{L}_g}{\delta\gamma_{\nu\rho}}\right)_{\text{явн}} g^{\mu\sigma}\gamma_{\rho\sigma} + \frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta\mathbf{L}_g}{\delta g_{\mu\nu}},$$

$$\underset{m}{\Theta}{}^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta\mathbf{L}_m}{\delta g_{\mu\nu}}, \tag{2}$$

где учтена теорема, доказанная ранее. Складывая ТЭИ, выписанные в (2), и учитывая уравнения поля тяготения:

$$\frac{\delta\mathbf{L}_g}{\delta g_{\mu\nu}} + \frac{\delta\mathbf{L}_m}{\delta g_{\mu\nu}} = 0, \tag{3}$$

имеем:

$$\Theta^{\mu\nu} = \underset{g}{\Theta}{}^{\mu\nu} + \underset{m}{\Theta}{}^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}}\left(\frac{\delta\mathbf{L}_g}{\delta\gamma_{\nu\rho}}\right)_{\text{явн}} g^{\mu\nu}\gamma_{\rho\sigma}, \tag{4}$$

что можно непосредственно получить из формализма Нетер. Для лагранжиана Розена [2]:

$$\mathbf{L}_g = \frac{\sqrt{-g}}{2\varkappa}\left(B_{\mu\nu\varkappa}B^{\varkappa\mu\nu} - B_{\varkappa}B^{\varkappa}\right). \tag{5}$$

Из (4) следует выражение:

* Здесь ограничимся случаем, когда $\mathbf{L}_g = \mathbf{L}_g(\gamma_{\mu\nu}, g_{\mu\nu})$.

$$\Theta_\mu^\nu = \frac{1}{2\varkappa} \widetilde{\mathrm{Div}}_\lambda \widetilde{\mathrm{Div}}_\varkappa \left(\gamma^{\lambda\varkappa} g^{\nu\rho}{}_{..}\gamma_{\mu\rho} + \delta^\nu_\mu g^{\lambda\varkappa} - 2\gamma^{\varkappa(\nu} g^{\rho)\lambda}\gamma_{\mu\rho}\right). \tag{6}$$

Легко видеть, что (6) тождественно сохраняется:

$$\widetilde{\mathrm{Div}}_\nu \Theta_{\mu}{}^{\nu} = 0. \tag{7}$$

Этот вывод, однако, имеет место для любой теории рассматриваемого вида независимо от лагранжиана гравитационного поля, что можно доказать, переходя в (1) от $t^{\lambda\varkappa}$ к $\Theta^{\lambda\varkappa}$ и опуская первый индекс.

Таким образом, в рассматриваемой формулировке теории поля сохраняются смешанные компоненты ТЭИ Гильберта. Другие калибровки ТЭИ самосогласованной системы полей не приводят к какому бы то ни было закону сохранения энергии-импульса. Произвол же в выборе ТЭИ в силу его первоначального определения на основе тождества Нетер допустим лишь для контравариантных компонент из-за неперестановочности операций опускания индекса и ковариантного дифференцирования $\widetilde{\nabla}_\lambda$, т. е. из-за римановости метрики $g_{\mu\nu}$ пространства-времени. Этот факт предохраняет теорию от появления следствий типа гипотезы Лоренца — Леви — Чивитта.

Если лагранжиан самосогласованной системы полей зависит только от первых производных функций поля, то тензор момента энергии-импульса может быть взят в калибровке:

$$\mu^{\mu\nu\varkappa} = 2X^{[\mu}\Theta^{\nu]\varkappa}, \tag{8}$$

подчиняясь соотношению (см. [1]):

$$\widetilde{\mathrm{Div}}_\varkappa \mu^{\mu\nu\varkappa} + 2\Theta^{[\mu\nu]} - 2\left(X^{[\mu}B^{\nu]\lambda}{}_{..\varkappa} - B^{\lambda[\mu}{}_{..\varkappa}X^{\nu]}\right)\Theta^\varkappa_\lambda = 0,$$

которое переписывается также в виде:

$$\widetilde{\mathrm{Div}}_\varkappa \mu_{\mu\nu}{}^{\varkappa} + 2\Theta_{[\mu\nu]} + 2X^\lambda \widetilde{Q}_{\varkappa\lambda[\mu}\Theta_{\nu]}{}^{\varkappa} = 0, \tag{9}$$

где $\widetilde{Q}_{\lambda\mu\nu} = -\widetilde{\nabla}_\lambda g_{\mu\nu}$. Таким образом, никакие из компонент тензора момента энергии-импульса (ТМЭИ) самосогласованной системы полей в общем случае не сохраняются.

Вернемся к варианту теории поля с лагранжианом (5). Если ОСР подчиняется условию Фока (см. [1]):

$$'B^\lambda = \widetilde{\mathrm{Div}}_\varkappa g^{\lambda\varkappa} = 0, \tag{10}$$

то (6) упростится:

$$\Theta_{\mu}{}^{\nu} = \frac{1}{2\varkappa} \widetilde{\mathrm{Div}}_\varkappa \widetilde{\mathrm{Div}}_\varkappa \left(\gamma^{\lambda\varkappa} g^{\nu\rho}\gamma_{\mu\rho}\right). \tag{11}$$

Интервал для поля Шварцшильда в координатах x^0, r, ϑ, φ, связанных с координатами Фока соотношениями:

$$x^{\bar 0} = x^0,\ x^{\bar 1} = r\sin\vartheta\cos\varphi;\ x^{\bar 2} = r\sin\vartheta\sin\varphi,\ x^{\bar 3} = r\cos\vartheta, \tag{12}$$

запишется так:

$$ds^2 = -\frac{r-m}{r+m}dx^{0^2} + \frac{r+m}{r-m}dr^2 + (r+m)^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2), \tag{13}$$

где m — геометризованная масса источника тяготения. Вычисления с помощью (11)—(13) показывают, что

$$\Theta_{\bar 0}{}^{\bar 0} = \frac{1}{\varkappa}\frac{m^2}{r^2(r-m)^2}\cdot\frac{7r^2 - 4mr + m^2}{r^2 - m^2}. \tag{14}$$

Этот ответ не совпадает ни с одним из результатов, собранных в [3] для различных вариантов (в том числе и нетензорных) определения энергии-импульса в теории гравитации Эйнштейна. Из (14), в частности, вытекает, что в системе отсчета

$$h_{\lambda}{}^{k} = \mathrm{diag}\left\{\left(\frac{r-m}{r+m}\right)^{1/2},\ \left(\frac{r+m}{r-m}\right)^{1/2},\ r+m,\ (r+m)\sin\vartheta\right\} \tag{15}$$

(латинские индексы нумеруют векторы лоренцевого базиса; их численные значения выделяются шляпкой) энергия гравитационного поля Шварцшильда, запасенная в сферическом слое: $r_0 < r' < r$, равна:

$$E_g(r) = -cP_{g\hat{0}}(r) = -h^{0\cdot}{}_{\hat{0}}(r) \int\limits_{x^0=\mathrm{const}} \Theta^{\bar{0}}_{\bar{0}}(r')\, h_{\bar{0}}{}^{\hat{0}}(r')\, d\tau_{\hat{0}}(r',\ \vartheta',\ \varphi') =$$

$$= \frac{4\pi m}{\varkappa} \frac{\Delta u}{u^2 u_0^2} \left(\frac{2}{u} - 1\right)^{\frac{1}{2}} (u_0^2 u^2 - 4u - 4u_0), \qquad (16)$$

где $u = 1 - m/r$, $u_0 = 1 - m/r_0$, $\Delta u = u - u_0$. Поскольку в области определения системы отсчета (15) $0 < u < 1$, $0 < u_0 < 1$, то из (16) следует, что

$$E_g < 0 \text{ при } m < r_0 < r. \qquad (17)$$

Для решения Переса

$$ds^2 = -dx^{0^2} + dx^{1^2} + dx^{2^2} + 2f(dx^0 + dx^3)^2,\ f = f(x^1,\ x^2,\ x^0 + x^3) \quad (18)$$

система координат x^0, x^1, x^2, x^3 в (18) оказывается гармонической. Расчет по формуле (11), записанной в ОСР (черта над индексом в данном случае опущена), приводит к ответу:

$$\Theta_0{}^{\cdot 0} = -\Theta_0{}^{\cdot 3} = -\Theta_3{}^{\cdot 0} = \Theta_3{}^{\cdot 3} = \frac{1}{\varkappa} \Box f, \qquad (19)$$

где $\Box = \gamma^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$ — даламбертиан. Остальные компоненты $\Theta_\mu{}^{\cdot\nu}$ заведомо равны нулю. В силу уравнений Эйнштейна, сводящихся для метрики (18) к единственному уравнению: $f_{,11} + f_{,22} = 0$, все компоненты в (19) обращаются в нуль.

Отрицательность энергии поля Шварцшильда, как показывает детальный анализ, связана со знаком силы поля тяготения в ньютоновском приближении теории гравитации Эйнштейна и жестко согласована с требованием положительности энергии негравитационных полей. В этом можно убедиться, умножая (5) на некоторую постоянную a и выписывая в этом случае уравнения поля и уравнение геодезической, предполагая поле статистическим и центрально-симметричным. Таким образом, знак энергии гравитационного поля есть его специфическая черта, отличающая это поле от других полей. Возможно, для реальных гравитационных волн энергия в рассматриваемом подходе окажется положительной. Нулевой результат для волны Переса говорит о возможном нефизическом характере этого решения уравнений Эйнштейна в пустоте.

Список литературы

1. Тимощенко А. И. // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1986. № 1. С. 27; 1987. № 2. С. 3.
2. Rosen N. // Phys. Rev. 1940. V. 57. № 1. P. 147.
3. Zhao M.-G. // J. Phys. A: Math. Gen. 1984. V. 17. № 3. P. 619.

Поступила в редакцию 25.01.85.

УДК 535

Л. М. БАРКОВСКИЙ, ФО ТХИ НГУЕТ ХАНГ

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ОТРАЖЕНИЯ ДЛЯ МАГНИТОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И ОПТИЧЕСКИ АКТИВНЫХ КРИСТАЛЛОВ СРЕДНИХ СИНГОНИЙ

В настоящее время большой интерес представляют кристаллы сегнетомагнетиков, обладающие некоторой электрической и магнитной структурой. Вследствие этого в них одновременно проявляются свойства антисегнетоэлектриков и магнетиков [1]. В некоторых кристаллах ярко выра-