ГЛАДКИЕ РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ ПРИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ПЕРВОЙ КОСОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Устилко Е.В.

Белорусский государственный университет, г. Минск;
ustilko@tut.by;
науч. рук. – Ф. Е. Ломовцев, д-р физ.-мат. наук, проф.

Выведен критерий корректности (по Адамару) смешанной задачи для одномерного волнового уравнения с характеристической первой косой производной в нестационарном граничном режиме для решений целых высших порядков гладкости.

Ключевые слова: смешанная задача, нестационарное граничное условие, характеристическая первая косая производная, критерий корректности.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В первой четверти плоскости $\dot{G}_\infty$ решается смешанная задача

$$u_{tt}(x,t)+\left(a_1-a_2\right)u_{xt}(x,t)-a_1a_2u_{xx}(x,t)=f(x,t),\ (x,t)\in\dot{G}_\infty=(0,+\infty)\times(0,+\infty), \tag{1}$$

$$u(x,t)\big|_{t=0}=\varphi(x),\ u_t(x,t)\big|_{t=0}=\psi(x),\ x>0, \tag{2}$$

$$\Gamma(t)u\equiv\left[\alpha(t)(u_t+a_1u_x)+\gamma(t)u\right]\big|_{x=0}=\mu(t),\, t>0. \tag{3}$$

Пусть $C^k(\Omega)$ – множество k раз непрерывно дифференцируемых функций на подмножестве Ω плоскости R^2.

Определение 1. Функция $u\in C^m(G_\infty)$, $G_\infty=[0,+\infty)\times[0,+\infty)$, называется гладким ($m$ раз непрерывно дифференцируемым) решением смешанной задачи (1)–(3), если она удовлетворяет уравнению (1) на $\dot{G}_\infty$ в обычном смысле, а начальным условиям (2) и граничному режиму (3) в смысле пределов соответствующих выражений от ее значений $u(\dot{x},\dot{t})$ во внутренних точках $(\dot{x},\dot{t})\in\dot{G}_\infty$ для всех указанных граничных точек x и t.

УСЛОВИЯ СОГЛАСОВАНИЯ

Для задачи (1)–(3) следующие условия согласования граничного режима (3) с начальными условиями (2) и уравнением (1) выведены в [1]:

$$J_1\equiv\alpha(0)\left[\psi(0)+a_1\varphi'(0)\right]+\gamma(0)\varphi(0)=\mu(0),$$

$$J_2\equiv\alpha'(0)\left[\psi(0)+a_1\varphi'(0)\right]+\gamma'(0)\varphi(0)+$$

$$+\alpha(0)\Big\langle a_2\left[\psi'(0)+a_1\varphi''(0)\right]+f(0,0)\Big\rangle+\gamma(0)\psi(0)=\mu'(0),$$

$$J_{q+1}\equiv\alpha^{(q)}(0)\left[\psi(0)+a_1\varphi'(0)\right]+\gamma^{(q)}(0)\varphi(0)+q\left\{\alpha^{(q-1)}(0)\Big\langle a_2\left[\psi'(0)+a_1\varphi''(0)\right]+f(0,0)\Big\rangle+\right.$$

$$\left.+\gamma^{(q-1)}(0)\psi(0)\right\}+\sum_{i=2}^{q}C_q^i\left\{\alpha^{(q-i)}(0)\left\langle a_2^i\left[\psi^{(i)}(0)+a_1\varphi^{(i+1)}(0)\right]+\sum_{j=0}^{i-1}a_2^j f^{(j;i-j-1)}(0,0)\right\rangle+\right.$$

$$+\gamma^{(q-i)}(0)\left\langle a_2\,\frac{a_2^{i-1}-(-a_1)^{i-1}}{a_1+a_2}\left[\psi^{(i-1)}(0)+a_1\varphi^{(i)}(0)\right]+\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{k=0}^{i-2}\frac{a_2^{k+1}-(-a_1)^{k+1}}{a_1+a_2}\,f^{(k;i-k-2)}(0,0)+(-a_1)^{i-1}\psi^{(i-1)}(0)\right\rangle\right\}=\mu^{(q)}(0),\quad q=2,3,\dots,m. \qquad (4)$$

Рассмотрим внимательно сумму, которая присутствует в (4) при $q=m$:

$$K_m\equiv\sum_{j=0}^{m-1}a_2^j f^{(j;m-j-1)}(0,0) \qquad (5)$$

Для всех правых частей $f\in C^{m-1}(G_\infty)$ выражение (5) конечно.

Определение 2. Если существует конечный предел K_m суммы (5) по всем функциям $f\in C^{m-1}(G_\infty)$, которые сходятся к менее гладким функциям $f\in C^{m-2}(G_\infty),$ удовлетворяющим следующему требованию гладкости

$$\alpha(t)\frac{\partial^m}{\partial t^m}\left(\int_0^t f(a_2(t-\tau),\tau)\,d\tau\right)\in C(R_+),\quad R_+=[0,+\infty), \qquad (6)$$

то этот предел K_m называется *критериальным* значением старших производных от f в условиях согласования (4) при $q=m$ для целых $m\in N$.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Уравнение (1) в плоскости R^2 переменных x,t имеет два различных семейства характеристик: $x-a_1t=C_1,\ x+a_2t=C_2,\ \forall C_1,\ C_2\in R.$ Первая четверть плоскости G_∞ делится характеристикой $x=a_1t$ на два множества $G_-=\{(x,t)\in G_\infty:\ x>a_1t>0\}$ и $G_+=\{(x,t)\in G_\infty:\ 0\le x\le a_1t\}$. Из работы [2] мы используем частные решения неоднородного уравнения (1) в $\dot{G}_\infty$:

$$F_i(x,t)=\frac{1}{a_1+a_2}\left[\int_0^{t_i(x)}\int_{x_i(t,\tau)}^{x+a_2(t-\tau)}f(s,\tau)ds\,d\tau+\int_{t_i(x)}^{t}\int_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)}f(s,\tau)ds\,d\tau\right],$$

где $t_i(x)=(-1)^i\left[t-(x/a_1)\right]$ и $x_i(t,\tau)=\left[1-(-1)^i\left((a_2/a_1)+1\right)\right](x-a_1t)-a_2\tau$, $i=1,2$.

Теорема 1. *Пусть в граничном режиме (3) коэффициенты* α, $\gamma \in C^m(R_+)$ для целых $m \geq 2$, $\gamma(t) \neq 0,\ t \in R_+$. *Для того чтобы смешанная задача (1)–(3) в* $\dot{G}_\infty$ *имела единственное и устойчивое по* φ, ψ, μ, f *решение* $u \in C^m(G_\infty)$, *необходимо и достаточно условий гладкости (6),*

$$f \in C^{m-2}(G_\infty),\ \varphi \in C^m(R_+),\ \psi \in C^{m-1}(R_+), \tag{7}$$

$$\int_0^t f(x + a_2(t-\tau), \tau)d\tau \in C^{m-1}(G_\infty), \tag{8}$$

$$\left[1 - (-1)^i (a_2 / a_1 + 1)\right] \int\limits_0^{t_i(x)} f\big(x_i(t,\tau), \tau\big)d\tau + \int\limits_{t_i(x)}^{t} f\big(x - a_1(t-\tau), \tau\big)d\tau \in C^{m-1}(G_\infty),\ i = 1,2, \tag{9}$$

$$\mu \in C^m(R_+),\ \alpha(t)\varphi^{(m+1)}(a_2 t),\ \alpha(t)\psi^{(m)}(a_2 t) \in C(R_+), \tag{10}$$

выполняются условия согласования (4) с критериальным значением K_m *из (5) для старших производных от правой части* $f \in C^{m-2}(G_\infty)$, *удовлетворяющей требованию гладкости (6). Этим гладким решением* $u \in C^m(G_\infty)$ *характеристической задачи (1)–(3) на* $\dot{G}_\infty$ *является функция:*

$$u_-(x,t) = \frac{1}{a_1 + a_2}\left[a_1\varphi(x + a_2 t) + a_2\varphi(x - a_1 t) + \int\limits_{x - a_1 t}^{x + a_2 t} \psi(s)ds\right] +$$
$$+ \frac{1}{a_1 + a_2} \int\limits_0^t \int\limits_{x - a_1(t-\tau)}^{x + a_2(t-\tau)} f(s,\tau)dsd\tau, \quad (x,t) \in G_-,$$

$$u_+(x,t) = \frac{1}{a_1 + a_2}\left\{a_1\left[\varphi(x + a_2 t) - \varphi\left(a_2\left(t - \frac{x}{a_1}\right)\right)\right] + \int\limits_{a_2(t - x/a_1)}^{x + a_2 t} \psi(s)ds\right\} +$$
$$+ F_2(x,t) + \gamma^{-1}\left(t - \frac{x}{a_1}\right)\left\{\mu\left(t - \frac{x}{a_1}\right) - \alpha\left(t - \frac{x}{a_1}\right)\left[a_1\varphi'\left(a_2\left(t - \frac{x}{a_1}\right)\right) + \psi\left(a_2\left(t - \frac{x}{a_1}\right)\right)\right] -\right.$$
$$\left. - \alpha\left(t - \frac{x}{a_1}\right)\int\limits_0^{t - x/a_1} f\left(a_2(t-\tau) - \frac{a_2}{a_1}x, \tau\right)d\tau\right\},\ (x,t) \in G_+. \tag{11}$$

Идея доказательства. Формулы (11) единственного гладкого решения $u \in C^m(G_\infty)$ смешанной задачи (1)–(3) на $\dot{G}_\infty$ очевидно совпадают с формулами единственного классического решения $u \in C^2(G_\infty)$ этой задачи при $m = 2$ в [3]: u_- – решение задачи Коши (1), (2) на G_-, а u_+ – решение задачи Пикара (1), (3) с равенством $u_+ = u_-$ на характеристике $x = a_1 t$ в G_+.

Из самой постановки смешанной задачи (1)–(3) и определения 1 гладких решений $u \in C^m(G_\infty)$ вытекают очевидные необходимые требования гладкости (7). Доказывается необходимость и достаточность требований гладкости (6), (8)–(10) для m раз непрерывной дифференцируемости функций u_- на G_- и u_+ на G_+. Процесс доказательства во многом похож на доказательство аналогичных требований для выше поставленной характеристической смешанной задачи при $m=2$ в [3].

Выражаются значения частных производных всех целых порядков до порядка $m \geq 2$ включительно от разности функций u_+ и u_- на критической характеристике $x=a_1 t$ через значения разностей $\mu^{(k)}(0)-J_{k+1}$, $k\in[0,m]$. Используя критериальные значения K_m из определения 2, отсюда выводится m раз непрерывная дифференцируемость функций u_+ и u_- на прямой $x=a_1 t$ из условий согласования (4) граничного данного μ с начальными данными φ, ψ и правой частью f уравнения (1).

Устойчивость решения u_- на G_- и u_+ на G_+ в соответствующем банаховом пространстве гладкого решения $u\in C^m(G_\infty)$ и произведении соответствующих банаховых пространств исходных данных f, φ, ψ, μ непосредственно можно установить из формул (11). Нормы этих банаховых пространств классического решения и исходных данных смешанной задачи (1)–(3) для $m=2$ имеются в статье [3].

Замечание. В нашей теореме 1 критериальные значения K_m при всех чётных $m=2,\ 4,\ 6,...,$ фактически равны значениям

$$K_m=\alpha(0)\sqrt{a_2^2+1}\,\frac{\partial}{\partial \overset{\rightharpoonup}{\nu}_2}\left(\sum_{j=0}^{(m-2)/2} a_2^{2j} f^{(2j;m-2j-2)}\right)(0,0),\ m=2,4,6,...,$$

производной по вектору $\overset{\rightharpoonup}{\nu}_2=\{a_2,1\}$ от указанных в круглых скобках сумм частных производных порядка $m-2$ от правой части f в начале координат $(0,0)$ с общим множителем $\alpha(0)\sqrt{a_2^2+1}$.

Библиографические ссылки

1. *Устилко Е. В.* Условия согласования значений характеристической косой производной на конце струны, начальных данных и правой части волнового уравнения. / Е. В. Устилко, Ф. Е. Ломовцев // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2020. № 1. С. 30–37.
2. *Ломовцев Ф. Е.* Метод корректировки пробных решений общего волнового уравнения в первой четверти плоскости для минимальной гладкости его правой части. // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2017. № 3. С. 38–52.
3. *Ломовцев Ф. Е.* Критерий корректности смешанной задачи для общего уравнения колебаний полуограниченной струны с нестационарной характеристической первой косой производной в граничном условии. / Ф. Е. Ломовцев, Е. В. Устилко // Веснік Віцебскага дзяржаунага універсітэта. 2018. № 4 (101). С. 18–28.