О СВОЙСТВАХ СПЕЦИАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ, СВЯЗАННЫХ С УРАВНЕНИЯМИ ПЕНЛЕВЕ

В. В. Сорокина

Белорусский государственный университет, г. Минск;
viktoria.sorokina.96@gmail.com;
науч. рук. – В. И. Громак, д-р физ.-мат. наук, проф.

Рассматривается уравнение шестого порядка обобщенной иерархии второго уравнения Пенлеве. Исследования проводятся в рамках задач аналитической теории дифференциальных уравнений: анализа специальных полиномов, определяющих рациональные решения иерархии второго уравнения Пенлеве. В работе получены рациональные решения уравнения шестого порядка обобщенной иерархии второго уравнения Пенлеве; построены преобразования Беклунда; получены и проанализированы первые полиномы Яблонского-Воробьева для рассматриваемого уравнения; проведен анализ о количестве полюсов рациональных решений уравнения и их вычетах и на его основе сформулированы 2 теоремы.

Ключевые слова: полиномы Яблонского-Воробьева; обобщенная иерархия второго уравнения Пенлеве; преобразование Беклунда; число полюсов рациональных решений и их вычетов.

В общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений важное место занимает теория уравнений Пенлеве и их высших аналогов, поскольку данный раздел позволяет провести анализ прикладных нелинейных систем со свойством Пенлеве.

Шесть уравнений Пенлеве (PI–PVI) были впервые обнаружены приблизительно в начале двадцатого века Пенлеве, Гамбье и их коллегами при исследовании нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. В последнее время проявляется значительный интерес к уравнениям Пенлеве, главным образом благодаря факту, что они возникают как сокращения солитонных уравнений, которые разрешимы с помощью обратного рассеяния.

Уравнения Пенлеве могут рассматриваться как нелинейные аналоги классических специальных функций. Они имеют иерархии рациональных решений и однопараметрические семейства решений, выражаемых через классические специальные функции. Кроме того, уравнения Пенлеве допускают симметрии относительно аффинных групп Вейля, которые связаны с преобразованиями Беклунда.

Для рациональных решений возникает задача представления их через специальные полиномы. Для иерархии второго уравнения Пенлеве – это полиномы Яблонского-Воробьева.

В процессе выполнения работы рассматривалась связь полиномов Яблонского-Воробьева, их структуры и числа полюсов рациональных решений, а также их вычетов.

Цель данной работы – развить подход построения и анализа специальных полиномов, определяющих рациональные решения уравнения шестого порядка обобщенной иерархии второго уравнения Пенлеве.

ПОЛИНОМЫ ЯБЛОНСКОГО-ВОРОБЬЕВА И РАЦИОНАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ

Рассмотрим уравнение шестого порядка обобщенной иерархии второго уравнения Пенлеве [1]

$$\tilde{P}_2^{[6]} \equiv w^{(6)} = 2w^2(5(\beta_1+\beta_2)w'' + 7w^4) - w^{(4)}(\beta_1+\beta_2) - \beta_1\beta_2 w'' +$$
$$+ w(z + 10(\beta_1+\beta_2)(w')^2 + 42(w'')^2 + 56w'(w')^3) + 70w''((w')^2 -$$
$$- w^4) + 2\,w^3(\beta_1\beta_2 - 70(w')^2) - 6w^5(\beta_1+\beta_2) + 20w^7 + \alpha \qquad (1)$$

Полиномы Яблонского-Воробьева для (1) имеют структуру [2]

$$P^{[3]}(z) = \boldsymbol{P_1^1 Q_1^0 P_2^3 Q_2^1 P_3^6 Q_3^3},$$
$$Q^{[3]}(z) = \boldsymbol{P_1^0 Q_1^1 P_2^1 Q_2^3 P_3^3 Q_3^6}. \qquad (2)$$

Первые несколько полиномов Яблонского-Воробьева имеют вид

$$Q_0^{[3]}(z) = 1,$$
$$Q_1^{[3]}(z) = z,$$
$$Q_2^{[3]}(z) = z^3 + 4\,\beta_1\beta_2,$$
$$Q_3^{[3]}(z) = z^6 + 20\,z^3\beta_1\beta_2 - 144\,z\,(\beta_1+\beta_2) - 80\,\beta_1^2\beta_2^2.$$

Корни в зависимости от значений параметров представлены на рис.1.

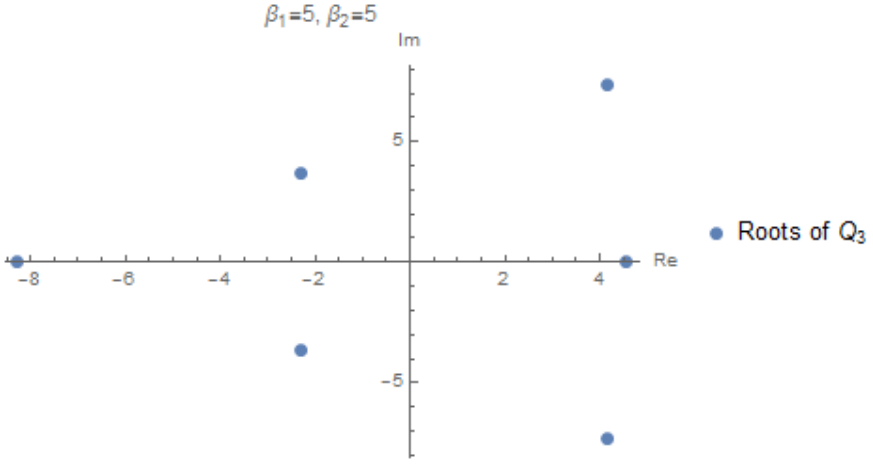

Рис.1. Корни Q_3 полинома

Рациональные решения уравнения (1) могут быть представлены при помощи полиномов Яблонского-Воробьева [3]

$$w_n^{[3]}(z) = \frac{(Q_{n-1}(z))'}{Q_{n-1}(z)} - \frac{(Q_n(z))'}{Q_n(z)}.$$

Несколько рациональных решений уравнения (1)

$$w^{[3]}(z, 0, \beta_1, \beta_2) = 0,$$
$$w^{[3]}(z, 1, \beta_1, \beta_2) = -\frac{1}{z},$$
$$w^{[3]}(z, 2, \beta_1, \beta_2) = \frac{1}{z} - \frac{3\,z^2}{z^3 + 4\,\beta_1\beta_2}.$$

О ЧИСЛЕ ПОЛЮСОВ РАЦИОНАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ И ИХ ВЫЧЕТАХ

Рассмотрим серию B-полиномов, определяемых рекуррентным соотношением

$$B_n^{[3]}(\beta) = \frac{1}{k_n} Resultant[Q_{n-1}(z), Q_n(z), z], B_0^{[3]} = 1, n = 1,2, \ldots$$

где $k_n \neq 0$ – нормирующие постоянные, $\alpha = n$.

Если $\alpha = n \in \boldsymbol{Z}$, а для параметра β выполнено условие $B_{|n|}(\beta) \neq 0$, то рациональное решение $w(z, n, \beta)$ уравнения (1) не имеет полюсов с вычетом из множества $\{\pm 2, \pm 3\}$, при этом справедливо распределение

$$l_1^+ = \frac{1}{2}\alpha(\alpha - 1), l_1^- = \frac{1}{2}\alpha(\alpha + 1), l_k^{\pm} = 0, k \in \{2, \ldots, N\}. \quad (3)$$

Теорема (о характере полюсов).

Пусть $B_n = 0$ для некоторых β_1^0, β_2^0. Тогда $\exists\, z_0$, что $Q_n(z_0) = Q_{n-1}(z_0) = 0$. При этом, исходя из структуры полиномов Яблонского-Воробьева (2), возможен только один из следующих случаев:

1. z_0 – трехкратный корень Q_2 и простой корень Q_3;
2. z_0 – простой корень Q_2 и трехкратный корень Q_3;
3. z_0 – трехкратный корень Q_2 и шестикратный корень Q_3;
4. z_0 – шестикратный корень Q_2 и трехкратный корень Q_3.

В первом случае z_0 является полюсом для $w(z)$ с вычетом $+2$, во втором – полюсом с вычетом -2, в третьем – полюсом с вычетом -3, в четвертом – полюсом с вычетом -3.

Пользуясь теоремой о равенстве нулю суммы вычетов в расширенной комплексной плоскости и разложением в окрестности бесконечно удаленной точки, имеем

$$\sum_{k=1}^{3} k(l_k^+ - l_k^-) = -\alpha. \quad (4)$$

Также справедлива следующая формула

$$\sum_{k=1}^{3} k^2(l_k^+ + l_k^-) = \alpha^2. \quad (5)$$

Теорема-уточнение (о числе полюсов).

Для $\alpha = 3$, пользуясь формулами (4) и (5), а также теоремой о характере полюсов, имеем один из следующих случаев:

1. $l_3^- = 1, l_1^- = l_1^+ = l_2^- = l_2^+ = l_3^+ = 0;$
2. $l_1^- = 5, l_2^+ = 1, l_1^+ = l_2^- = l_3^- = l_3^+ = 0;$
3. $l_1^+ = 1, l_2^- = 2, l_1^- = l_2^+ = l_3^- = l_3^+ = 0;$
4. $l_1^- = 3, l_1^+ = 2, l_2^- = 1, l_2^+ = l_3^- = l_3^+ = 0;$
5. $l_1^- = 6, l_1^+ = 3, l_2^+ = l_2^- = l_3^- = l_3^+ = 0.$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты работы могут быть использованы для исследования числа полюсов рациональных решений высших аналогов уравнения Пенлеве и их вычетов, а также найти применение в аналитической теории дифференциальных уравнений, при решении задач теоретической и математической физики и построении математических моделей в теории нелинейных колебаний и квантовой теории поля. Сформулированную теорему и ее уточнение можно обобщить для всей модифицированной иерархии второго уравнения Пенлеве.

Библиографические ссылки

1. *Gromak V.I.,* On solutions of Painlevé equations of higher orders, in Analytic Methods of Analysis and Differential Equations // Theses of International Science Seminar, September 11–14, 2012, Minsk, Ed. by Rogozin, S.V., p. 27.
2. *Gromak V.I. and Zenchenko A.S.,* On the theory of higher-order Painlevé equations // J. Differential Equations, 2004, vol. 40, no. 5, pp. 625–633.
3. *Clarkson P.A. and Mansfield E.L.,* The second Painlevé equation, its hierarchy and associated special polynomials // Nonlinearity, 2003, vol. 16, no. 3, pp. R1–R26.
4. *Gromak V.I., Laine I., and Shimomura S.,* Painlevé Differential Equations in the Complex Plane // De Gruyter Studies in Mathematics, Vol. 28, Berlin-New York: Wal-ter de Gruyter, 2002.
5. *Airault H.,* Rational solutions of Painlevé equations // Stud. Appl. Math., 1979, vol. 61, no. 1, pp. 31–53.