

ИССЛЕДОВАНИЕ КОНВЕКЦИИ БЕНАРА-РЭЛЕЯ МЕТОДОМ ТРАССИРОВКИ ЧАСТИЦ

Я. Д. Титовец

Белорусский государственный университет, г. Минск;

yoscrimmer@gmail.com;

науч. рук. – А. С. Федотов, канд. физ.-мат. наук

В работе рассматривается метод трассировки частиц для системы с конвекцией Бенара-Рэлея, заключающийся в отслеживании идеальных безмассовых частиц (контрольных объемов текучей среды) в потоке. Скорость каждой частицы при этом считается совпадающей со скоростью жидкости. Рассматриваемый метод позволяет получить фазовые портреты области решения уравнений Навье-Стокса. В полученных в работе фазовых портретах установлено наличие стабильной огибающей в регулярном режиме, а в распределении частиц по энергиям обнаружено наличие трех максимумов, обусловленных упорядоченным характером течения в системе с конвекцией Бенара-Рэлея.

Ключевые слова: конвекция Бенара-Рэлея; метод трассировки частиц; уравнения Навье-Стокса; фазовый портрет.

ВВЕДЕНИЕ

Конвективная неустойчивость в тонком слое жидкости наблюдается во многих технических системах, а также представляет интерес с точки зрения теории самоорганизации. Одним из самых распространенных видов течений жидкости и газа в природе является конвекция, связанная с неоднородным нагревом. Конвекция в плоском горизонтальном слое жидкости, нагретом снизу и охлажденном сверху, или конвекция Бенара-Рэлея, является одним из наиболее распространенных видов конвективного течения, исследуемым на сегодняшний день.

Конвекция Бенара-Рэлея играет важную роль в геофизике, астрофизике, метеорологии, океанографии и инженерии, иными словами, представляет собой феномен, который наблюдается на различных пространственных и временных масштабах [1].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В рамках приближения Буссинеска жидкость предполагается слабо сжимаемой и зависимость плотности от температуры учитывается в виде:

$$\rho(T) = \rho_0(1 - \beta\theta), \quad (1)$$

где ρ – плотность жидкости, ρ_0 – плотность жидкости при равновесной температуре, β – коэффициент объемного расширения, θ – отклонение температуры от равновесного состояния.

На расчетной области была поставлена начально-краевая задача для системы уравнений для термогравитационной конвекции несжимаемой жидкости в приближения Буссинеска [2]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} &= -\frac{1}{\rho_0} \nabla P + \nu \Delta \vec{v} + \vec{g} \beta \theta \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \theta &= \chi \Delta \theta \\ \operatorname{div} \vec{v} &= 0 \end{aligned} \quad , \quad (1)$$

где $\vec{v}$ – скорость течения, P – давление, ν – кинематическая вязкость, $\vec{g}$ – ускорение свободного падения, χ – коэффициент температуропроводности.

Для задачи были поставлены следующие граничные и начальные условия:

$$\begin{cases} T = T_{hot}, y = 0, x \in \Gamma \\ T = T_{cold}, y = y_{max}, x \in \Gamma \\ -\vec{n} \cdot \lambda \nabla T = 0, x = 0, y \in \Gamma \\ -\vec{n} \cdot \lambda \nabla T = 0, x = x_{max}, y \in \Gamma \\ \vec{v} = 0, (x, y) \in \Gamma \\ \vec{v}|_{t=0} = 0, (x, y) \in \Omega \\ T|_{t=0} = T_0, (x, y) \in \Omega \end{cases} \quad , \quad (2)$$

где Ω – расчетная область, Γ – граница расчетной области, x_{max} – максимальное значение координаты x в расчетной области, y_{max} – максимальное значение координаты y в расчетной области, $\vec{n}$ – нормаль к границе области, λ – коэффициент теплопроводности.

МЕТОД РЕШЕНИЯ

Решение задачи с помощью COMSOL Multiphysics базируется на численном решении уравнений в частных производных методом конечных элементов, основанным на проекционных методах решения уравнений или вариационных методах минимизации функционалов.

В данной работе была выбрана дискретизация, под которой понимают представление истинного решения задачи на элементе в виде приближенной функции, с использованием базисных функций «P2 + P1» в COMSOL Multiphysics, позволяющая рассчитать скорость с ошибкой не хуже $O(h^2)$ и давление с ошибкой не хуже $O(h)$. Для температуры

была выбрана линейная дискретизация, которая позволяет рассчитать температуру с ошибкой не хуже $O(h)$.

Сетка, построенная для данной задачи, включает 2646 треугольных элементов, из которых 172 элемента являются граничными (рис.1).

У границ расчетной области сетка сгущается для того, чтобы лучше разрешить течение приграничного слоя. Поскольку на границах жидкость считается неподвижной, нужно большее количество элементов для корректного разрешения перехода от неподвижной жидкости на границах расчетной области к подвижной внутри нее.

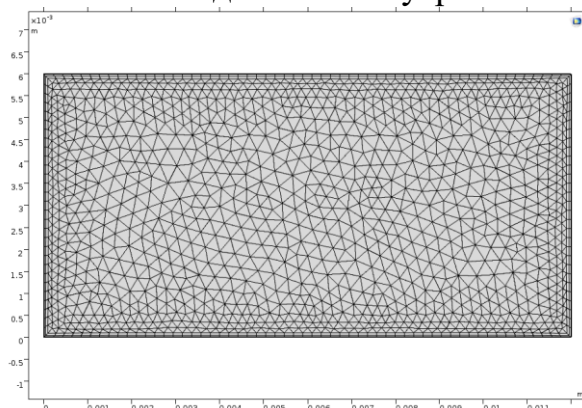


Рис. 1. Расчетная сетка для задачи о конвекции Бенара-Рэля

АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ И ВЫВОДЫ

Путем моделирования в COMSOL Multiphysics была получена классическая картина конвекции Бенара-Рэля. На рис.2 представлены поле температуры и поле скорости в стационарном режиме. Число Рэля при этом составляет $2,2 \cdot 10^5$.

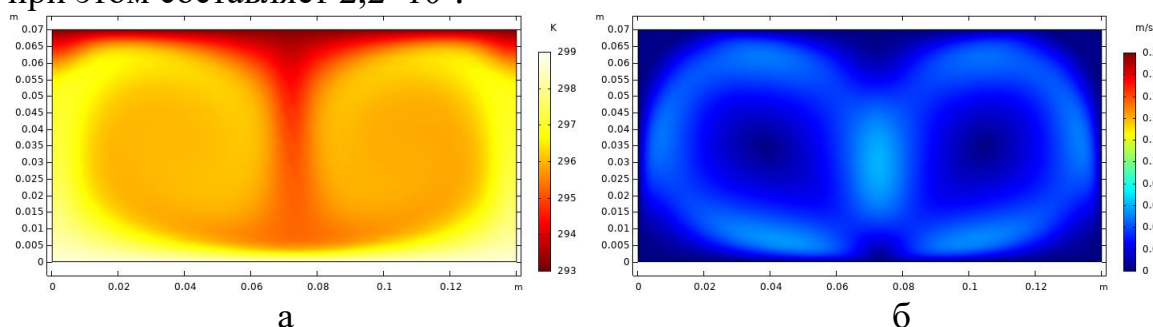


Рис. 2. Поле температуры (а) и поле скорости (б) для конвекции Бенара-Рэля

На рис.3 изображены линии тока для движения жидкости.

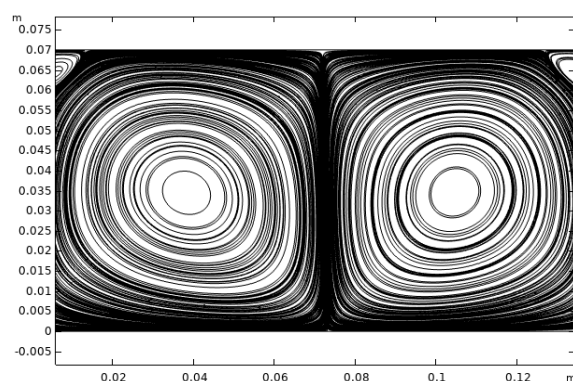


Рис. 3. Линии тока для конвекции Бенара-Рэлея

Скорость введенных в ламинарный поток безмассовых частиц в любой точке пространства совпадает со скоростью, полученной из уравнений Навье-Стокса. Для расчетов был использован метод обобщенных минимальных невязок (GMRES). GMRES – итерационный метод решения очень больших систем линейных уравнений. Ключевая идея GMRES основана на решении задачи наименьших квадратов на каждом итерационном шаге. В расчетах использовалось 80 000 частиц (рис.4).

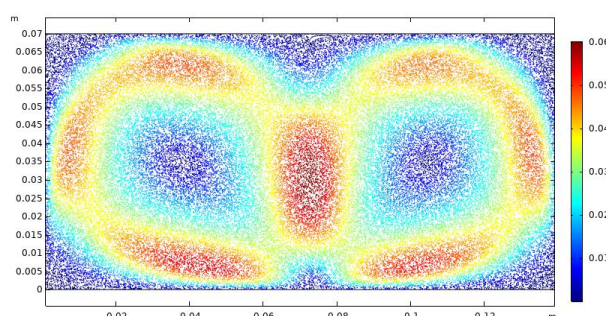


Рис. 4. Положение частиц в устойчивом вихре

В результате расчетов были получены фазовые портреты (рис.5).

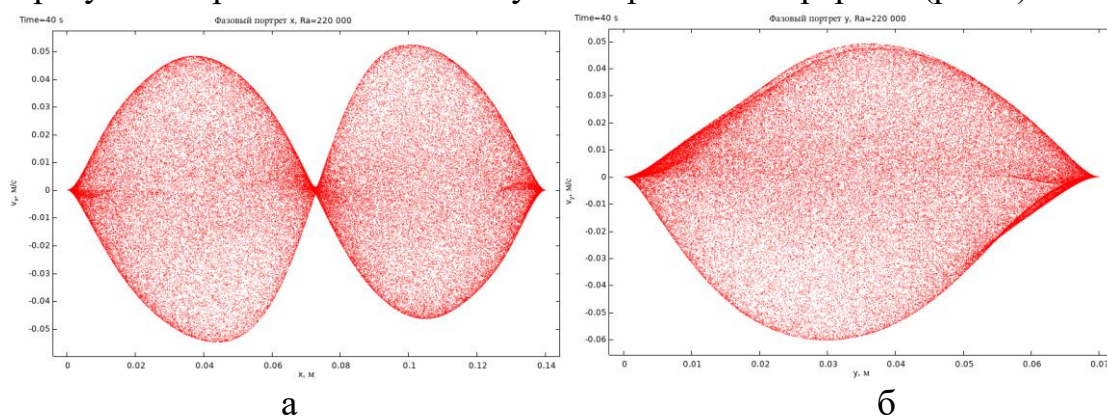


Рис. 5. Фазовый портрет x (а) и y (б)

Также было построено распределение введенных в поток безмассовых частиц по энергии, исключая частицы со скоростью,

близкую к нулевой, которая была присуща частицам вблизи стенок. На рис.6 представлены гистограммы распределения частиц по энергии и по нормированной энергии для различных чисел Рэлея.

На гистограммах можно заметить 3 максимума, первый и самый явный из которых соответствует почти неподвижным частицам у стенок. Положение второго максимума, соответствующего частицам на границе вихрей, сдвигается в сторону меньших нормированных энергий и в сторону больших абсолютных энергий с ростом числа Рэлея. Так же можно заметить, что высота второго и третьего максимумов с ростом числа Рэлея падает относительно фона.

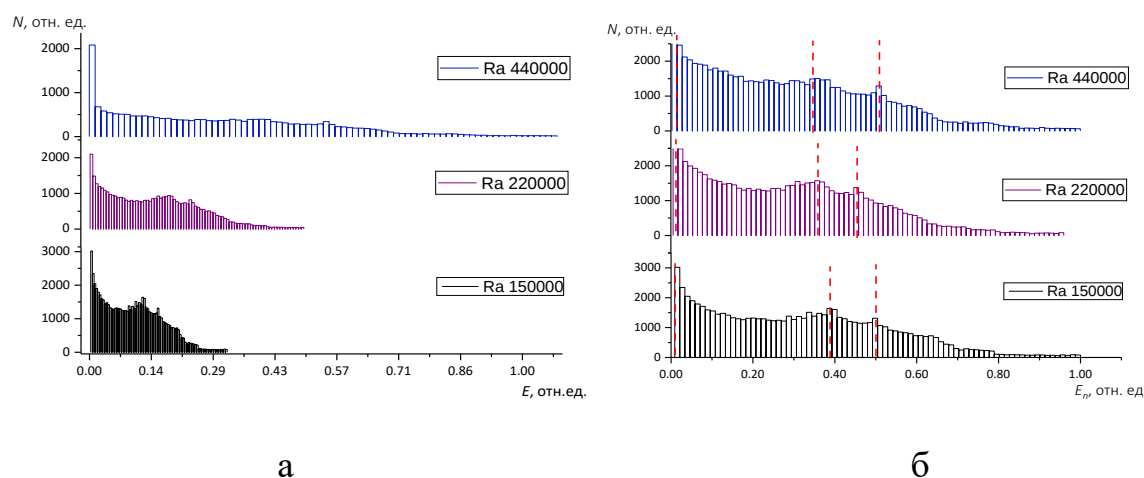


Рис. 6. Гистограммы распределения частиц по энергии (а) и по нормированной энергии (б)

Таким образом, исходя из полученных фазовых портретов установлено, что вся исследуемая область характеризуется устойчивыми фазовыми портретами со стабильной огибающей. Также методом трассировки частиц установлено, что распределение потока по локальной энергии демонстрирует наличие трех характерных максимумов, первый из которых соответствует почти неподвижным частицам у границы области, второй указывает на характерную энергию течения на границах устойчивых ячеек, третий - на характерную энергию течения в точках контакта между соседними ячейками, а также между ячейкой и стенкой.

Библиографические ссылки

1. Григорьев В.В., Захаров П.Е. Численное моделирование двумерной конвекции Рэлея-Бенара // Математические заметки СВФУ, 2017, том 24, выпуск 1, с.87–98 с
2. Фрик П.Г. Турбулентность - подходы и модели. Москва: Институт компьютерных исследований, 2003. 292 с.