

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КВАЗИ-ФРАКТАЛЬНАЯ СТОЛКНОВИТЕЛЬНАЯ ДИНАМИКА СОЛИТОНОВ В ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ САМОДУАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ϕ^4

А. А. Горина

Белорусский государственный университет

nastya.gorina.2931@gmail.com

науч. рук. – Я.М. Шнир, д-р физ.-мат. наук, проф.

Исследуются две различные нелинейные теории скалярного поля в 1+1 измерении. Первая из них представляет собой однопараметрическую модель, включающую в качестве частных случаев при двух предельных значениях параметров модели классические нелинейные теории поля, имеющие решениями простейшие топологические солитоны – кинки – теории синус-Гордона и ϕ^4 . В данной смешанной модели также обнаружены топологические солитоны при произвольном значении параметра; детально изучены особенности рассеяния солитонов. Вторая модель – двухпараметрическая самодуальная теория ϕ^4 . В данной модели были обнаружены решения в виде кинка в одном секторе и нетопологического солитона по второму.

Ключевые слова: солитоны; кинки; интегрируемость.

ВВЕДЕНИЕ

Вопрос о характере взаимодействия солитонов при столкновении естественным образом возникает в любой модели, допускающей эти решения. В случае интегрируемых теорий, например теории синус-Гордона, солитоны проходят друг сквозь друга без изменения своей формы. В неинтегрируемых же теориях столкновения отличаются своей хаотичностью. При этом в таких моделях солитоны часто обладают так называемой внутренней модой, которая играет важную роль при передаче энергии солитона континууму. Взаимодействие кинка и антикинка в модели ϕ^4 примечательно наличием резонансных окон – интервалов начальной скорости солитонов, для которых окончательное отражение сопровождается несколькими столкновениями [1].

В классе топологических солитонов особую роль играют решения с насыщенным нижним пределом энергии из-за своей стабильности. В некоторых специальных теориях эти решения имеют и другие интересные свойства. Например, они удовлетворяют более простым дифференциальным уравнениям, обычно первого порядка, которые заключают в себе уравнения движения, обычно второго порядка. Эти решения называются *самодуальными*. Самодуальные решения

возникают в теориях, в которых топологический заряд имеет интегральное представление, то есть могут быть представлены в виде интеграла плотности топологического заряда. Из того факта, что топологический заряд инвариантен относительно гладких деформаций полевых конфигураций, следует, что соответствующая плотность топологического заряда удовлетворяет тождествам, имеющим форму дифференциальных уравнений, которые вместе с самодуальными уравнениями первого порядка составляют полную систему уравнений.

В данной работе исследуется столкновительная динамика кинков в модели синус-Гордона- ϕ^4 и свойства статических солитонов в самодуальной двухкомпонентной теории ϕ^4 .

МОДЕЛЬ СИНУС-ГОРДОНА- ϕ^4

Для анализа столкновительной динамики солитонов при переходе от интегрируемой к неинтегрируемой теории будем рассматривать обычную (1+1)-мерную модель скалярного поля, задаваемую плотностью лагранжиана

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \phi_t^2 - \frac{1}{2} \phi_x^2 + U(\phi) \quad (1)$$

с потенциалом

$$U(\phi) = (1 - \epsilon)(1 - \cos \phi) + \frac{\epsilon \phi^2}{8\pi} (\phi - 2\pi)^2. \quad (2)$$

Параметр ϵ — безразмерный параметр модели, задающий степень отклонения потенциала от периодического потенциала синус-Гордона. Соответствующее уравнение поля для (1) имеет вид:

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} + (1 - \sin \phi) + \frac{\epsilon \phi}{2\pi^2} (\phi - 2\pi)(\phi - \pi) = 0 \quad (3)$$

СТОЛКНОВИТЕЛЬНАЯ ДИНАМИКА СОЛИТОНОВ В МОДЕЛИ СИНУС-ГОРДОНА- ϕ^4

Проанализируем процесс столкновения кинка и антикинка в модели синус-Гордона- ϕ^4 с параметром ϵ .

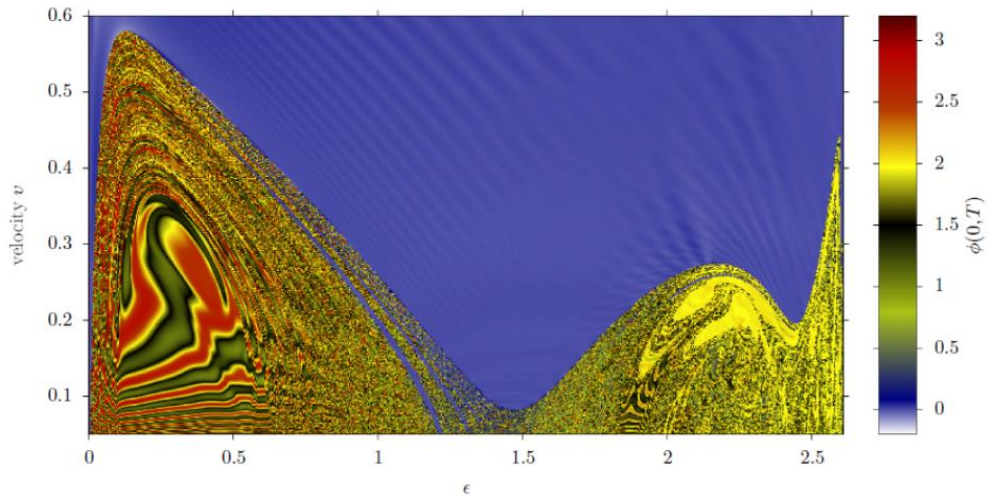


Рис. 1. Процесс столкновения кинка и антикинка для небольших скоростей. Значение поля в центре столкновения солитонов как функция скорости и параметра деформации ϵ .

Во-первых заметим, что по мере уменьшения ϵ увеличивается соответствующая критическая скорость v_{cr} — минимальная скорость, при которой отражение кинка и антикинка происходит без образования промежуточного связанного состояния. Ее максимум приходится на значение $\epsilon = 0.13$. По мере дальнейшего уменьшения параметра ϵ критическая скорость начинает резко уменьшаться, приближаясь к нулю.

Во-вторых, резонансные окна взаимодействия кинка и антикинка меняются при изменении параметра модели: по мере уменьшения ϵ , начиная с $\epsilon = 1$, окна становятся уже и смещаются в сторону изменения соответствующей критической скорости.

Далее, оказалось, что в случае резонансного взаимодействия с двумя столкновениями линейная зависимость между промежутком времени от первого до второго столкновения и количеством внутренних осцилляций характерна не только для $\epsilon = 1$, но и для других значений этого параметра.

Далее было установлено, что также как и в модели ϕ^4 для кинка и антикинка в рассматриваемой модели существует возможность столкнуться более двух раз перед тем, как окончательно разойтись. При этом резонансная структура столкновений кинка и антикинка нарушается по мере уменьшения параметра ϵ . В картине столкновений появляются так называемые «фальшивые окна». Другими словами, при $\epsilon \ll 1$ в процессе столкновения доминирующими становятся эффекты, связанные с излучением.

Интересный эффект возникает для случаев $\epsilon < 0.05$, когда в потенциале модели существуют два ложных вакуумных значения, наличие которых существенно влияет на динамику солитонов [2], например в рассматриваемой модели появляется новый канал

столкновений. Отметим, что малые значения параметра деформации ϵ соответствуют тонкостенному приближению в задаче о распаде ложного вакуума [3].

САМОДУАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ

Рассмотрим самодуальную теорию с потенциалом

$$V = \frac{1}{2}(\phi_1^2 - a^2)^2 + \frac{1}{2}(\phi_2^2 - b^2)^2 - \lambda\phi_1^2\phi_2^2 + \frac{2\lambda}{1-\lambda^2}, \quad (4)$$

где λ — константа связи. Уравнения самодуальности для данной двухпараметрической модели имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_1}{dx} &= \pm \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} (-c_1 + \phi_1^2 - \lambda(-c_2 + \phi_2^2)), \\ \frac{d\phi_2}{dx} &= \pm \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} (-c_1 + \phi_2^2 - \lambda(-c_2 + \phi_1^2)) \end{aligned} \quad (5)$$

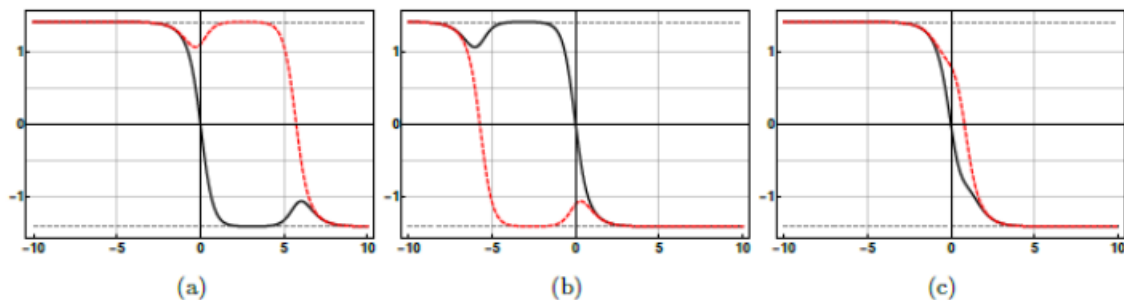


Рис. 2. Решения уравнений (5) для различных c_1, c_2 .

Как можно заметить, в модели в одном из секторов могут существовать конфигурации из нетопологических солитонов, которые часто называют lump.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе была построена нелинейная теория скалярного поля в 1+1 пространственно-временном измерении. Данная теория представляет собой однопараметрическую модель, включающую в качестве частных случаев при двух предельных значениях параметров модели классические нелинейные теории поля, имеющие решениями простейшие топологические солитоны — кинки — теории синус-Гордона и ϕ^4 . В данной смешанной модели были также обнаружены топологические солитоны при произвольном значении параметра; были детально изучены особенности рассеяния солитонов. Также была построена двухпараметрическая самодуальная теория ϕ^4 . В данной

модели были обнаружены решения в виде кинка в одном секторе и нетопологического солитона по второму. В дальнейшем представляет интерес подробнее рассмотреть самодуальную модель и сравнить динамику солитонов в ней с динамикой рассмотренной однопараметрической моделью и с несамодуальной двухпараметрической моделью [4].

Библиографические ссылки

1. R. H. R. H. Goodman, «Kink-Antikink Collisions in the ϕ^4 Equation: The n-Bounce Resonance and the Separatrix Map,» SIAM J. Applied Dynamical System, vol. 4, no. 4, p. pp. 1195–122.
2. M. E. M. H. J. Ashcroft, «Head butting sheep: kink collisions in the presence of false vacua,» Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, т. 49, № 36, 2016.
3. S. R. Coleman, «Fate of the false vacuum: Semiclassical theory,» Phys. Rev. D, т. 15, p. 2929, 1977.
4. T. R. a. Y. S. A. Halavanau, «Resonance structures in coupled two-component ϕ^4 model» Physical review D: Particles and fields, т. 86, p. 085027, 2012.