СЛАБЫЕ РЕБЕРНЫЕ ПОКРЫТИЯ И АССОЦИИРОВАННЫЕ С НИМИ КЛАССЫ ГРАФОВ

Д. А. Дыбовская

Белорусский государственный университет, г. Минск;
miss.dybowskaya@gmail.com;
науч. рук. – Ю. Л. Орлович, канд. физ.-мат. наук, доц.

Целью настоящей работы является рассмотрение понятия слабого реберного покрытия графа и получение структурных характеризаций классов графов, определяемые в терминах взаимосвязи между максимальными паросочетаниями или минимальными доминирующими множествами ребер графа и слабыми реберными покрытиями этого графа.

Ключевые слова: реберное покрытие, слабое реберное покрытие; паросочетание; доминирующее множество ребер, треугольный граф, наследственный класс; NP-полнота.

ВВЕДЕНИЕ

Напомним, что подмножество ребер графа называется *реберным покрытием*, если оно покрывает все вершины графа, т. е. каждая вершина графа инцидентна по крайней мере одному ребру из этого подмножества. В работе рассматривается релаксированный вариант этого понятия – слабое реберное покрытие, предложенный Ю. Л. Орловичем. Множество M ребер графа называется его *слабым реберным покрытием*, если каждая вершина графа, не инцидентная никакому из ребер множества M, смежна с обеими вершинами некоторого ребра из этого множества (т. е. образует с этим ребром треугольник). Понятно, что в графе, не содержащем треугольников, понятие слабого реберного покрытия совпадает с классическим понятием реберного покрытия.

В [1] было введено понятие треугольного графа, как графа, в котором каждое максимальное независимое множество является его независимым окрестностным множеством. В настоящей работе будет рассмотрен реберный аналог таких графов – *паросочетательно треугольные графы* – графы, в которых каждое максимальное паросочетание является слабым реберным покрытием. Также будут введены в рассмотрение *доминантно-паросочетательно треугольные графы* – графы, в которых свойством слабого реберного покрытия обладает каждое минимальное доминирующее множество ребер. С одной стороны, доминантно-паросочетательно треугольные графы образуют собственный подкласс паросочетательно треугольных графов, а с другой – являются реберным аналогом доминантно треугольных графов, введенных в [2].

В работе установлены структурные характеризации указанных классов графов и показано, что эти классы являются достаточно содержательными. Из полученных характеризаций следует существование полиномиальных алгоритмов распознавания принадлежности графа соответствующим классам. Охарактеризованы максимальные наследственные подклассы паросочетательно треугольных и доминатно-паросочетательно треугольных графов. Также установлено, что классические задачи распознавания клика, k-раскраска графа и цепь наибольшей длины являются NP-полными в классе доминатно-паросочетательно треугольных графов.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Все теоретико-графовые понятия, используемые в данной работе, соответствуют общепринятым (см., например, [3]). Предполагается, что рассматриваемые графы не содержат изолированных вершин.

Дадим определение слабого реберного покрытия графа.

Определение 1. Множество $M \subseteq E(G)$ ребер графа G называется *слабым реберным покрытием* (сокращенно СРП) этого графа, если каждая вершина $v \in V(G)$ инцидентна некоторому ребру из M или лежит в некотором треугольнике, содержащем ребро из M.

Можно дать альтернативное определение СРП.

Утверждение 1. Множество $M \subseteq E(G)$ ребер графа G является СРП тогда и только тогда, когда каждая вершина $v \in V(G)$ лежит в общей клике с некоторым ребром из M.

Любое реберное покрытие является также и СРП. Обратное, вообще говоря, неверно. В следующей теореме охарактеризованы графы, в которых каждое СРП является реберным покрытием.

Теорема 1. Пусть G – граф без изолированных вершин. В графе G каждое СРП является реберным покрытием тогда и только тогда, когда для любого треугольника графа G каждая вершина этого треугольника смежна с некоторой вершиной степени 1.

Теорема 2. Задача нахождения СРП наименьшей мощности является NP-трудной.

В [4] вводится следующее понятие расстояния в геометрическом графе. Пусть имеется изображение графа на плоскости, где вершинам соответствуют точки, а ребрам — соединяющие их отрезки, которые попарно не пересекаются кроме, возможно, своих концевых точек. Каждый отрезок имеет единичную длину, является замкнутым и прямолинейным. Расстояние между двумя произвольными точками p и q геометрического графа определяется как наименьшая длина кривой, принадлежащей графу (проходящей по ребрам графа) и соединяющая эти точки.

Пусть M — СРП геометрического графа G. Это значит, что если установить метку в произвольной точке на каждом ребре из M, то расстояние от любой точки графа до некоторой метки не будет превосходить 2.

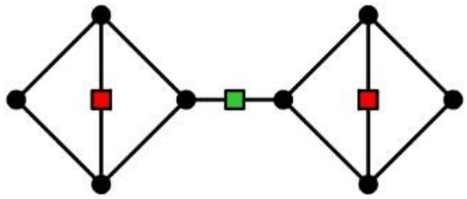

Рис. 1

Например, на рис. 1 СРП представлено “вертикальными” ребрами графа с красными метками, расположенными в серединах этих ребер. Зеленой меткой, расположенной в середине “горизонтального” ребра графа, отмечена точка, находящаяся на расстоянии 2 от любой из красных меток. Этот пример показывает, что понятие СРП может оказаться полезным при моделировании логистических задач, связанных с размещением объектов сервиса, например, заправочных станций на трассах.

Введем определение паросочетательно треугольного графа.

Определение 2. Граф G называется *паросочетательно треугольным*, если для любого максимального паросочетания M и любой вершины v, не инцидентной ни одному ребру из M, существует такое ребро $e = uw \in M$, что v одновременно смежна с u, и с w.

Таким образом, в паросочетательно треугольном графе каждое максимальное паросочетание является также и СРП. Обозначим через $\mathcal{M}$ класс всех паросочетательно треугольных графов.

Утверждение 2. Для любого графа H существует паросочетательно треугольный граф G, содержащий H в качестве порожденного подграфа.

Следующая теорема по сути является критерием паросочетательной треугольности графа.

Теорема 3. Граф является паросочетательно треугольным тогда и только тогда, когда в нем не существует максимального паросочетания M и вершины v таких, что M покрывает все вершины $N(v)$ и при этом не имеет общих ребер с подграфом, порожденным $N(v) \cup \{v\}$.

Следствие 1. Для задачи распознавания паросочетательно треугольных графов существует алгоритм с временной сложностью $O(|G|^4)$.

Введем понятие доминантно-паросочетательно треугольного графа.

Определение 3. Граф G называется *доминантно-паросочетательно треугольным*, если для любого его минимального доминирующего множества ребер D и любой вершины $v \in V(G)$ выполнено: либо v инцидентна некоторому ребру из D, либо v образует треугольник с некоторым ребром из D, т. е. существуют такие u, $w \in V(G)$, что $uw \in D$ и v смежна с u и w.

Класс всех доминантно-паросочетательно треугольных графов обозначим $\mathcal{DM}$.

Утверждение 3. Имеет место строгое включение $\mathcal{DM} \subset \mathcal{M}$.

Следующая теорема является критерием доминантно-паросочетательной треугольности графа.

Теорема 4. Граф G без изолированных вершин является доминантно-паросочетательно треугольным тогда и только тогда, когда в нем не существует такой вершины v, что для любой вершины $x \in N(v)$ найдется смежная с x вершина, не принадлежащая $N(v) \cup \{v\}$.

Следствие 2. Для задачи распознавания доминантно-паросочетательно треугольных графов существует алгоритм с временной сложностью $O(|G|^3)$.

Теорема 5. Задачи КЛИКА ($k \geq 4$), k-РАСКРАСКА ($k \geq 3$) и ЦЕПЬ НАИБОЛЬШЕЙ ДЛИНЫ являются NP-полными в классах $\mathcal{DM}$ и $\mathcal{M}$.

Граф G назовем *сильно паросочетательно треугольным*, если каждый его порожденный подграф является паросочетательно треугольным. Аналогично определяется сильно доминантно-паросочетательно треугольный граф. Обозначим через $\mathcal{HM}$ и $\mathcal{HDM}$ наследственные классы сильно паросочетательно треугольных и сильно доминантно-паросочетательно треугольных графов соответственно.

Теорема 6. Наследственные классы $\mathcal{HM}$ и $\mathcal{HDM}$ совпадают и представляют собой класс P_3-свободных графов.

Таким образом, взаимосвязь между введенными классами графов можно выразить следующей цепочкой: $\mathcal{HM} = \mathcal{HDM} \subset \mathcal{DM} \subset \mathcal{M}$.

Библиографические ссылки

1. Orlovich, Y. Independent domination in triangle graphs / Y. Orlovich, I. Zverovich // Electron. Notes Discrete Math. – 2007. – Vol. 28. – P. 341–348.
2. Картынник, Ю. А. Доминантно-треугольные графы и графы верхних границ / Ю. А. Картынник, Ю. Л. Орлович // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2014. – Т. 58, № 1. – С. 16–25.
3. Лекции по теории графов / В.А. Емеличев [и др.]. – М.: Наука, 1990. 384 с.
4. Enami, K. Recursive formulas for beans functions of graphs / K. Enami, S. Negami // Theory and Applications of Graphs. – 2020. – Vol. 7, № 1. – Article 3.