

УДК 533.723:577.352.4(086.48)

СВОЙСТВА СИММЕТРИИ БРОУНОВСКОГО МОТОРА С ПИЛООБРАЗНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ, ВОЗМУЩАЕМЫМ ГАРМОНИЧЕСКИМИ ФЛУКТУАЦИЯМИ

**И. В. ШАПОЧКИНА¹⁾, А. Д. САВИНА¹⁾,
В. М. РОЗЕНБАУМ²⁾, Т. Е. КОРОЧКОВА²⁾**

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

²⁾Институт химии поверхности им. А. А. Чуйко НАН Украины,
ул. Генерала Наумова, 17, 03164, г. Киев, Украина

Представлено исследование общих симметричных свойств модели броуновских моторов (рэтчетов). Оно базируется на построении последовательностей симметричных преобразований, отражающих явные и скрытые симметрии средней скорости рэтчета как функционала пространственно-периодической потенциальной энергии наночастицы, а также на учете типов симметрий периодических функций, являющихся компонентами потенциальной энергии аддитивно-мультипликативной формы. Исследуется рэтчет с пилообразным стационарным

Образец цитирования:

Шапочкина ИВ, Савина АД, Розенбаум ВМ, Корочкова ТЕ. Свойства симметрии броуновского мотора с пилообразным потенциалом, возмущаемым гармоническими флуктуациями. *Журнал Белорусского государственного университета. Физика*. 2021;1:41–49.

<https://doi.org/10.33581/2520-2243-2021-1-41-49>

For citation:

Shapochkina IV, Savina ND, Rozenbaum VM, Korochkova TE. Symmetry properties of a Brownian motor with a sawtooth potential perturbed by harmonic fluctuations. *Journal of the Belarusian State University. Physics*. 2021;1:41–49. Russian. <https://doi.org/10.33581/2520-2243-2021-1-41-49>

Авторы:

Ирина Викторовна Шапочкина – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры компьютерного моделирования физического факультета.

Анастасия Дмитриевна Савина – студентка физического факультета. Научный руководитель – И. В. Шапочкина.

Виктор Михайлович Розенбаум – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий отделом теоретической и экспериментальной физики наносистем.

Таисия Евгеньевна Корочкова – кандидат физико-математических наук; старший научный сотрудник отдела теоретической и экспериментальной физики наносистем.

Authors:

Irina V. Shapochkina, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of computer modeling, faculty of physics.

shapoch@mail.ru

<https://orcid.org/0000-0002-6962-7931>

Nastassia D. Savina, student at the faculty of physics.

sadfiz@mail.ru

Viktor M. Rozenbaum, doctor of science (physics and mathematics), full professor; head of the department of theoretical and experimental physics of nanosystems.

vik-roz@mail.ru

<https://orcid.org/0000-0003-2889-3915>

Taisiya Ye. Korochkova, PhD (physics and mathematics); senior researcher at the department of theoretical and experimental physics of nanosystems.

tais crust@yahoo.com

<https://orcid.org/0000-0002-5110-0998>

потенциальным профилем, дихотомно возмущаемым пространственно-гармоническим сигналом. Делается заключение относительно возможности возникновения и направления рэтчет-эффекта в зависимости от значений параметра асимметрии пилообразного профиля, фазовых сдвигов управляющей компоненты и частот временных флуктуаций. При этом выводы основаны только лишь на преобразованиях симметрий, что демонстрирует предсказательную ценность изложенного подхода. Результаты симметричных рассуждений подтверждены численным моделированием функционирования рэтчета с дихотомными стохастическими пространственно-периодическими флуктуациями профиля потенциальной энергии наночастицы.

Ключевые слова: диффузионный транспорт; диффузионная динамика; рэтчет-системы; броуновские моторы; симметрия; пилообразный потенциал; гармонические флуктуации.

Благодарность. Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф20Р-032).

SYMMETRY PROPERTIES OF A BROWNIAN MOTOR WITH A SAWTOOTH POTENTIAL PERTURBED BY HARMONIC FLUCTUATIONS

I. V. SHAPOCHKINA^a, N. D. SAVINA^a,
V. M. ROZENBAUM^b, T. Ye. KOROSHKOVA^b

^aBelarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

^bChuiko Institute of Surface Chemistry, National Academy of Sciences of Ukraine,
17 Generala Naumova Street, Kyiv 03164, Ukraine

Corresponding author: I. V. Shapochkina (shapoch@mail.ru)

We present a study of general symmetry properties of a Brownian motor (ratchet) model. The study is based both on constructing chains of symmetry transformations reflecting explicit and hidden symmetries of the average ratchet velocity as a functional of the spatially periodic potential energy of a nanoparticle and on taking into account the symmetry types of periodic functions that are components of the potential energy of an additive-multiplicative form. A ratchet with a sawtooth stationary potential profile, dichotomously perturbed by a spatially harmonic signal, is investigated. Conclusions are made on both the possibility of occurrence of the ratchet effect and its direction for given values of the asymmetry parameter of the sawtooth profile, phase shifts of the control component and frequencies of temporal fluctuations. These conclusions have been obtained only on the basis of symmetry transformations; that demonstrates the predictive value of the approach presented. The results of the symmetry analysis are confirmed by numerical simulation of the functioning of a ratchet with dichotomous stochastic spatially periodic fluctuations of the nanoparticle potential energy.

Keywords: diffusion transport; diffusional dynamics; ratchet systems; Brownian motors; symmetry; sawtooth potential; harmonic fluctuations.

Acknowledgements. This work was supported by the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (project No. F20R-032).

Введение

На современном этапе термин «броуновский мотор (рэтчет)», безусловно, хорошо известен в теории и экспериментальных исследованиях управляемого транспорта наночастиц. Впервые он был предложен, чтобы проиллюстрировать невозможность спонтанного возникновения направленного движения из равновесных флуктуаций. Однако позже (во второй половине XX в.) данный термин был фактически адаптирован или, скорее, введен заново, но уже при обсуждении возможности и объяснении механизма возникновения направленного движения как результата выпрямления несмещенных неравновесных флуктуаций в природных и искусственных наносистемах [1; 2] при нарушении пространственной и (или) временной симметрии [3–7]. В настоящее время контролируемый рэтчет-эффект уверенно пополнил ряды новых перспективных методов управления нанотранспортом, которые либо уже успешно конкурируют [8–11], либо будут сочетаться с традиционными методами управления и контроля [12–15].

Возможность получения ненулевой скорости рэтчета тесно связана с симметричными свойствами пространственно-временных зависимостей процессов, управляющих рэтчет-системой, а также с геометрией наночастицы и подложки. Взаимовлияние или конкуренция этих свойств порождает симметричные свойства потенциального профиля моторной частицы, которые фактически определяют (не)воз-

можность эффекта. В работах [3; 4] были заложены основы построения теории симметрии рэтчет-систем, дальнейшее развитие и ряд значимых результатов которой можно найти, например, в статьях [5–7]. Нарушение пространственной симметрии – одно из необходимых условий возникновения рэтчет-эффекта. В простых случаях оно является следствием геометрии системы, в других – результатом тонкого и неочевидного взаимовлияния так называемых скрытых симметрий [6; 7]. Перефразируя П. Реймана [3], отсутствие направленного движения наночастиц при нарушении пространственной симметрии еще более удивительно, чем сам рэтчет-эффект. Поэтому симметричные результаты в рэтчет-моделях всегда становятся объектами особого внимания исследователей.

В теории броуновских рэтчетов пилообразный потенциал – наиболее удобная модель, в том числе и для учета и описания пространственной асимметрии системы, приводящей к рэтчет-эффекту. Это связано с простотой функционального задания наряду с удобством регулирования асимметрии потенциала переопределением ширин его звеньев l и $L - l$ (L – период профиля) [14]. Предельные случаи данной модели позволяют изучать тонкие эффекты, например сингулярные свойства характеристик рэтчет-систем, возникающие при скачках потенциального профиля, и конкуренцию характерных времен рэтчет-систем [16; 17]. Более того, пилообразный потенциальный профиль может быть легко реализован экспериментально, скажем, созданием липидных бислоев кусочно-линейной формы [11] (см. также работы [10; 18]). В качестве простой реализации флуктуаций пилообразного (и не только) потенциала можно использовать пространственно-гармонический сигнал. Последний тоже легко реализуется, а его фазовый сдвиг относительно звеньев пилообразного потенциала позволяет регулировать асимметрию рэтчет-системы в целом [19]. В свою очередь, временная зависимость флуктуаций может задаваться, например, симметричным дихотомным процессом или синусоидальной функцией, обладающими универсальным типом симметрии [7]. В настоящей статье на основе полученных ранее результатов [7] исследуются свойства симметрии рэтчетов подобного типа. Отметим, что такого рода построения интересны и важны своим предсказательным потенциалом: они позволяют делать общие выводы и прогнозировать поведение как отдельных рэтчетов, так и целых классов до непосредственного (ресурсозатратного) числового моделирования, опираясь только лишь на функциональное задание формы потенциального профиля и законов его изменения в пространстве и времени.

Преобразования симметрии

Выполним симметричный анализ свойств броуновского рэтчета с флуктуирующим пилообразным потенциалом $u_l(x)$, пространственная (а)симметрия которого определяется параметром l , а пространственная зависимость флуктуаций профиля $u_l(x)$ – первой гармоникой $w_{\lambda_0}(x)$, характеризующей фазовым сдвигом λ_0 (геометрия системы приведена на рис. 1). Пространственно-временная зависимость потенциальной энергии рэтчет-частицы, таким образом, определяется формой, являющейся частным (пожалуй, основным) случаем обобщенной аддитивно-мультипликативной формы $U(x, t) = \sum_{r=1}^N f^{(r)}(x) \sigma^{(r)}(t)$ [7] (описывающей при $N \rightarrow \infty$ в том числе и рэтчеты с блуждающим потенциалом):

$$U_{l; \lambda_0}(x, t) = u_l(x) + \sigma(t) w_{\lambda_0}(x). \quad (1)$$

Здесь функции $u_l(x)$ и $w_{\lambda_0}(x)$ на периоде их изменения L могут быть представлены (при определенном выборе начала координат) в виде

$$u_l(x) = u_0 \begin{cases} \frac{x}{l}, & 0 < x < l, \\ \frac{L-x}{L-l}, & l < x < L, \end{cases} \quad (2)$$

$$w_{\lambda_0}(x) = w_0 \cos \left(2\pi \left(\frac{x}{L} - \lambda_0 \right) \right). \quad (3)$$

Согласно терминологии, принятой в работе [7], произвольная периодическая функция $f(x) = f(x + L)$ относится к классу симметричных, антисимметричных и сдвигово-симметричных функций при выполнении равенств

$$f_s(x + x_s) = f_s(-x + x_s), \quad f_a(x + x_a) = -f_a(-x + x_a), \quad f_{sh}\left(x + \frac{L}{2}\right) = -f_{sh}(x) \quad (4)$$

соответственно (x_s и x_a задают положение оси симметрии и центра симметрии), а так называемая универсальная симметрия реализуется при одновременном выполнении всех условий (4). Отметим, что для компонент потенциальной энергии свойства (4) допускают сдвиги по оси ординат, поскольку потенциальная энергия определяется с точностью до произвольной постоянной. Легко видеть, что при заданном выборе начала координат для функции (2) справедливо равенство $u_l\left(x + \frac{l}{2}\right) = u_0 - u_l\left(-x + \frac{l}{2}\right)$, означающее, что $u_l(x)$ принадлежит к классу антисимметричных функций с центром симметрии в точке $x_a = \frac{l}{2}$. В свою очередь, функция $w_{\lambda_0}(x)$ вида (3) обладает универсальной симметрией, поскольку знак зависимости $w_{\lambda_0}(x)$ обращается при сдвиге на полпериода, а положение ее оси и центра симметрии определяется равенствами $x_s = \lambda_0 L$ и $x_a = \left(\lambda_0 + \frac{1}{4}\right)L$ соответственно. Будем считать, что временная зависимость $\sigma(t)$ также характеризуется универсальным типом симметрии, который соответствует симметричному дихотомному процессу (стохастическому либо детерминистическому периодическому) с равными средними длительностями обоих состояний [7]. Универсальная симметрия $\sigma(t)$ позволит нам в дальнейшем использовать ее различные проявления как частные случаи анализируемой модели.

Среднюю скорость рэтчета (обозначаемую далее символом v) с флуктуирующей периодической потенциальной энергией (*flashing ratchet*) можно рассматривать как функционал приложенной силы

$F_{l;\lambda_0}(x, t) = \frac{-\partial U_{l;\lambda_0}(x, t)}{\partial x}$, для которого в работах [5–7] были выведены свойства симметрии. Эти свойства могут быть легко переформулированы в терминах функционала потенциальной энергии [20]:

$$v\{U(x, t)\}_{(\text{vect})} = -v\{U(-x, t)\}, \quad v\{U(x + x_0, t + t_0)\}_{(\text{shift})} = v\{U(x, t)\}, \quad (5)$$

$$v\{U(x, t)\}_{(\text{C-R})} = v\{-U(-x, -t)\}, \quad (6)$$

что более удобно в ряде рассмотрений, в частности при анализе симметричных свойств энергетических характеристик рэтчет-систем. Соотношения (5) отвечают векторной и сдвиговой симметриям, носящим общий характер (т. е. демонстрируемым как инерционными, так и безынерционными системами), тогда как равенство (6), справедливое только в режиме сверхзатухания (*overdamped regime*), соответствует скрытой симметрии Куберо – Рензони [5], отражающей структуру самих решений уравнений динамики рэтчет-систем. Символы в скобках под знаками равенств обозначают характер симметрии: (vect) – векторная, (shift) – сдвиговая, (C – R) – симметрия Куберо – Рензони. Они введены для большей наглядности построения доказательств симметричных свойств ниже.

Если выбрать начало координат так, как показано на рис. 1, то замена $x \rightarrow -x$ приводит к следующим очевидным тождествам:

$$u_l(-x) = u_{L-l}(x), \quad w_{\lambda_0}(-x) = w_{1-\lambda_0}(x), \quad U_{l;\lambda_0}(-x, t) = U_{L-l;1-\lambda_0}(x, t). \quad (7)$$

Использование (7) позволяет доказать несколько важных свойств симметрии рассматриваемой модели рэтчета.

Прежде всего, построим цепочку преобразований, доказывающую выполнение ожидаемого свойства: замена $l \rightarrow L - l$, $\lambda_0 \rightarrow 1 - \lambda_0$ приводит к обращению направления движения рэтчета. Она выглядит следующим образом:

$$v\{U_{l;\lambda_0}(x, t)\}_{(\text{vect})} = -v\{U_{l;\lambda_0}(-x, t)\} = -v\{U_{L-l;1-\lambda_0}(x, t)\}. \quad (8)$$

Второе доказываемое свойство использует тождество $w_{\lambda_0-1/2}(x) = -w_{\lambda_0}(x)$, вытекающее из явного вида функции $w_{\lambda_0}(x)$, задаваемого формулой (3), согласно которому $w_{\lambda_0}\left(x + \frac{L}{2}\right) = w_{\lambda_0-1/2}(x)$, а также из того, что $w_{\lambda_0}(x)$ относится к сдвигово-симметричным функциям [7]. Тогда справедлива цепочка равенств

$$\begin{aligned} v\{U_{l;\lambda_0-1/2}(x, t)\} &= v\{u_l(x) - \sigma(t)w_{\lambda_0}(x)\}_{(\text{shift})} = v\left\{u_l(x) - \sigma\left(t + \frac{\tau}{2}\right)w_{\lambda_0}(x)\right\} = \\ &= v\{u_l(x) + \sigma(t)w_{\lambda_0}(x)\} = v\{U_{l;\lambda_0}(x, t)\}, \end{aligned} \quad (9)$$

в которой использована сдвиговая симметрия функции $\sigma(t)$ с периодом τ ($\sigma(t + \frac{\tau}{2}) = -\sigma(t)$). Объединяя равенства (8) и (9), имеем $v\{U_{l;\lambda_0-1/2}(x, t)\} = -v\{U_{L-l;1-\lambda_0}(x, t)\}$, а при учете замены $\lambda_0 \rightarrow \lambda_0 + \frac{1}{2}$ окончательно получаем

$$v\{U_{l;\lambda_0}(x, t)\} = -v\{U_{L-l;1/2-\lambda_0}(x, t)\}. \quad (10)$$

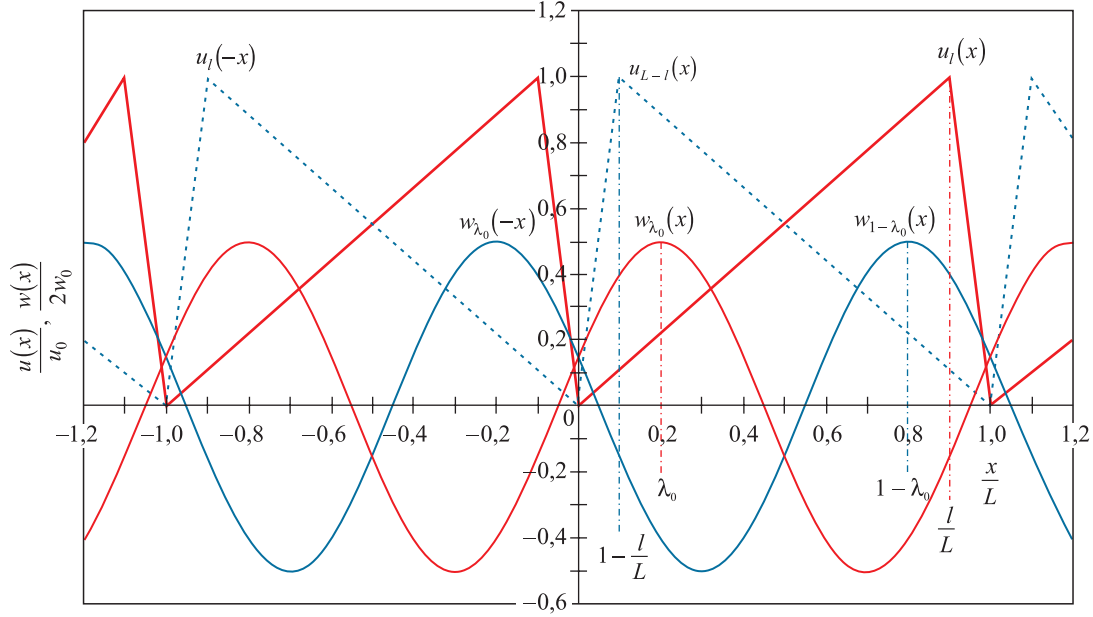


Рис. 1. Геометрия стационарной ($u_l(x)$) и флуктуирующей ($w_{\lambda_0}(x)$) компонент потенциальной энергии наночастицы аддитивно-мультипликативной формы (1), демонстрирующая свойства $u_l(-x) = u_{L-l}(x)$, $w_{\lambda_0}(-x) = w_{1-\lambda_0}(x)$,

$$w_{\lambda_0-1/2}(x) = -w_{\lambda_0}(x) \text{ и } w_{\lambda_0}\left(x + \frac{L}{2}\right) = w_{\lambda_0-1/2}(x)$$

Fig. 1. Geometries of the stationary component ($u_l(x)$) and fluctuating component ($w_{\lambda_0}(x)$) of the nanoparticle potential energy of the additive-multiplicative form (1), which demonstrate the properties $u_l(-x) = u_{L-l}(x)$, $w_{\lambda_0}(-x) = w_{1-\lambda_0}(x)$,

$$w_{\lambda_0-1/2}(x) = -w_{\lambda_0}(x) \text{ and } w_{\lambda_0}\left(x + \frac{L}{2}\right) = w_{\lambda_0-1/2}(x)$$

Из свойства (10), в частности, следует, что в качестве области определения параметра λ_0 достаточно использовать область $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Дополнительное свойство симметрии возникает у предельно асимметричного пилообразного потенциала, для которого имеет место тождество $u_L(-x) = u_0 - u_L(x)$ (см. рис. 1). Из явного вида функции $w_{\lambda_0}(x)$, задаваемой формулой (3), следует равенство $w_{\lambda_0}(-x) = -w_{1/2-\lambda_0}(x)$ (полезно сравнить его с приведенным выше $w_{\lambda_0-1/2}(x) = -w_{\lambda_0}(x)$). Использование этих двух равенств, а также симметричности ($\sigma_s(t + t_s) = \sigma_s(-t + t_s)$) универсально симметричной функции $\sigma(t)$ дает

$$\begin{aligned} v\{U_{L;1/2-\lambda_0}(x, t)\} &= v\{u_L(x) - \sigma(t)w_{\lambda_0}(-x)\} \stackrel{(C-R)}{=} v\{-u_L(-x) + \sigma(-t)w_{\lambda_0}(x)\} \stackrel{(\text{shift})}{=} \\ &\stackrel{(\text{shift})}{=} v\{-u_L(-x) + \sigma(-t + t_s)w_{\lambda_0}(x)\} = v\{-u_L(-x) + \sigma(t + t_s)w_{\lambda_0}(x)\} \stackrel{(\text{shift})}{=} \\ &\stackrel{(\text{shift})}{=} v\{-u_L(-x) + \sigma(t)w_{\lambda_0}(x)\} = v\{u_L(x) + \sigma(t)w_{\lambda_0}(x)\} = v\{U_{L;\lambda_0}(x, t)\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Обратим особое внимание, что, в отличие от свойства (10), которое носит общий характер и может применяться и при учете инерционных эффектов, полученное цепочкой преобразований (11) свойство симметрии

$$v\{U_{L;\lambda_0}(x, t)\} = v\{U_{L/2-\lambda_0}(x, t)\} \quad (12)$$

справедливо только в режиме сверхзатухания, поскольку использует операцию обращения времени и анализирующую ее симметрию Куберо – Рензони [5].

Наконец, при $l = \frac{L}{2}$ антисимметричный пилообразный потенциал становится одновременно и сдвигово-симметричным ($u_{L/2}\left(x + \frac{L}{2}\right) = -u_{L/2}(x)$), т. е. переходит в класс функций универсальной симметрии, к которому принадлежат функции $w_{\lambda_0}(x)$ и $\sigma(t)$. Это значит, что возникает свойство $U_{L/2;\lambda_0}(x, t + t_s) = -U_{L/2;\lambda_0}\left(x + \frac{L}{2}, -t + t_s\right)$, которое в терминологии работ [1; 3] соответствует так называемой супер-симметричной функции. Для таких функций рэтчет-эффект отсутствует, что доказывается следующей цепочкой равенств:

$$\begin{aligned} v\{U_{L/2;\lambda_0}(x, t)\} &\stackrel{(\text{shift})}{=} v\left\{U_{L/2;\lambda_0}\left(x + \frac{L}{2}, t + t_s\right)\right\} = v\{-U_{L/2;\lambda_0}(x, -t + t_s)\} \stackrel{(\text{shift})}{=} \\ &\stackrel{(\text{shift})}{=} v\{-U_{L/2;\lambda_0}(x, -t)\} \stackrel{(\text{C-R})}{=} v\{U_{L/2;\lambda_0}(-x, t)\} \stackrel{(\text{vect})}{=} -v\{U_{L/2;\lambda_0}(x, t)\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Использование здесь симметрии Куберо – Рензони также означает, что данное свойство справедливо лишь в режиме сверхзатухания, т. е. в указанной геометрии системы ненулевая скорость рэтчета может возникнуть только за счет изменения массы частицы, выводящего систему из этого режима.

Численное моделирование

Приведенные выше свойства симметрии позволили сделать ряд выводов о возможности или невозможности возникновения рэтчет-эффекта в выбранной геометрии либо обращения его направления при задании определенных значений параметров системы. Для иллюстрации доказанных здесь свойств симметрии полезно привести результаты численных расчетов средней скорости стохастического рэтчета с дихотомным изменением потенциальной энергии, выполненных на основе аппарата фурье-представления определяющих функций и искомым величин в рамках приближения малых флуктуаций ($w_0 \ll k_B T$, где k_B – постоянная Больцмана; T – абсолютная температура), развитого нами в работе [14]. В этих расчетах универсальный тип симметрии зависимости флуктуаций от времени обеспечивался выбором симметричного стохастического дихотомного процесса с обратным временем корреляции Γ . Данная величина задает среднюю частоту переключений состояний дихотомного процесса, равную $\frac{\Gamma}{4}$, и определяет безразмерный управляющий частотный параметр $\gamma = \Gamma \tau_s$, где $\tau_s \equiv \frac{\zeta L^2}{u_0}$ – время скольжения частицы с коэффициентом трения ζ по пологому участку предельно асимметричного пилообразного потенциала. На рис. 2 представлены зависимости средней скорости, измеряемой в единицах $v_0 = \left(\frac{w_0}{u_0}\right)^2 \left(\frac{L}{\tau_s}\right)$, от фазового сдвига λ_0 при различных отношениях $\frac{l}{L}$, вычисленные при $\frac{u_0}{k_B T} = 5$ и $\gamma = 1$. Свойство (9) подтверждается совпадением зависимостей левой и правой половин рисунка, соответствующих выбранному значению параметра асимметрии $\frac{l}{L}$. По этой же причине для анализа поведения далее будет достаточно, как отмечено выше, обсуждать только $\lambda_0 \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Для проверки свойства (10) сравним ход сплошных и пунктирных кривых в парах (2) и (5), (3) и (4), (1) и (6) (что соответствует зафиксированным

в численном эксперименте парам $\frac{l}{L}$ и $1 - \frac{l}{L}$. Видно, что, в частности, $v\{U_{L;0,4}(x, t)\} = -v\{U_{0;0,1}(x, t)\}$, $v\{U_{0,9L;0,15}(x, t)\} = -v\{U_{0,1L;0,35}(x, t)\}$, $v\{U_{0,8L;0,05}(x, t)\} = -v\{U_{0,2L;0,45}(x, t)\}$. Аналогичные результаты имеют место для любого $\lambda_0 \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. По мере изменения $\frac{l}{L}$ от 1 до 0 максимумы (минимумы) кривых приближаются к центру (удаляются от центра) отрезка $\lambda_0 = \frac{1}{4}$. Значение параметра асимметрии $\frac{l}{L} = \frac{1}{2}$ стационарной компоненты потенциала, при котором она приобретает свойства универсальной симметрии, определяет геометрию системы, где рэтчет-эффект невозможен (см. (13)), как и должно быть для суперсимметричных систем, обладающих свойством $U_{L/2;\lambda_0}(x, t + t_s) = -U_{L/2;\lambda_0}\left(x + \frac{L}{2}, -t + t_s\right)$. Кривые 1 и 6, соответствующие скорости рэтчетов со слабо флуктуирующим предельно асимметричным пилообразным профилем, демонстрируют свойства $v\{U_{L;\lambda_0}(x, t)\} = v\{U_{L;1/2-\lambda_0}(x, t)\}$ и $v\{U_{0;\lambda_0}(x, t)\} = v\{U_{0;1/2-\lambda_0}(x, t)\}$ (частный случай (12)) для любой пары значений λ_0 и $\frac{1}{2} - \lambda_0$, поскольку кривые симметричны относительно точки $\lambda_0 = \frac{1}{4}$.

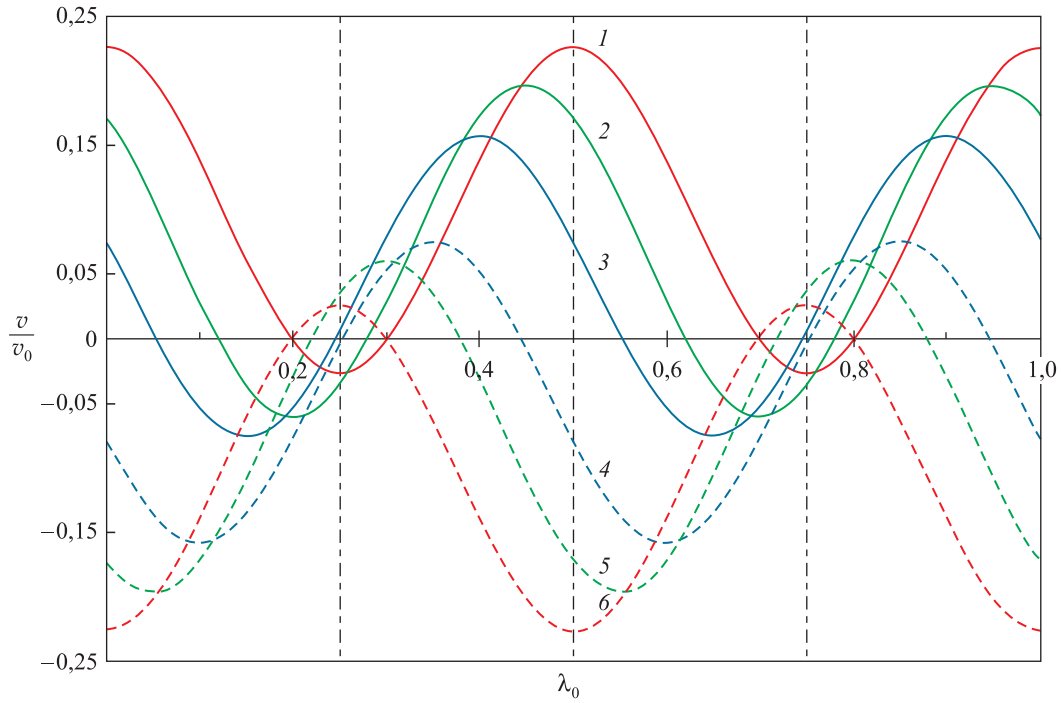


Рис. 2. Средняя скорость в единицах $v_0 = \left(\frac{w_0}{u_0}\right)^2 \left(\frac{L}{\tau_s}\right)$ как функция фазового сдвига λ_0

при различных отношениях $\frac{l}{L}$: 1 – 1; 2 – 0,9; 3 – 0,8; 4 – 0,2; 5 – 0,1; 6 – 0.

Вычисления проводились при $\frac{u_0}{k_B T} = 5$ и $\gamma = 1$

Fig. 2. The average ratchet velocity in units $v_0 = \left(\frac{w_0}{u_0}\right)^2 \left(\frac{L}{\tau_s}\right)$ as a function

of the phase shift λ_0 at various values of $\frac{l}{L}$: 1 – 1; 2 – 0.9; 3 – 0.8; 4 – 0.2; 5 – 0.1; 6 – 0.

Calculations were performed with $\frac{u_0}{k_B T} = 5$ and $\gamma = 1$

Заключение

Таким образом, в настоящей работе предложено развитие и продемонстрирована эффективность построения цепочек симметричных преобразований для исследования свойств броуновских моторов в конкретной геометрии пространственно-временных изменений рэтчет-потенциала. Для анализа выбрана рэтчет-система с пространственно-периодическим пилообразным потенциальным профилем, возмущаемым пространственно-гармоническим сигналом с временной зависимостью, описываемой симметричным дихотомным процессом. Симметричные свойства средней скорости рэтчета как функционала потенциальной энергии наночастицы, а также свойства симметрии рэтчет-потенциала аддитивно-мультипликативной формы сформулированы в терминах параметров асимметрии пилообразного профиля и величины фазового сдвига управляющей компоненты потенциала. Выбор пилообразного рельефа обусловлен однозначностью и простотой определения параметра асимметрии для такого профиля, а также популярностью подобного рельефа в теоретических и экспериментальных исследованиях. Очевидно, что результаты могут быть распространены на любую рэтчет-систему, для которой пространственная асимметрия стационарной компоненты потенциального профиля наночастицы описывается антисимметричной периодической функцией, характеризующейся только одним строго определенным параметром асимметрии. Проанализировано поведение системы при различных комбинациях ее управляющих (в данном случае – геометрических) параметров. Сделаны выводы относительно возможности возникновения направленного движения наночастиц как рэтчет-эффекта и направления этого движения в такой системе при заданных значениях (диапазонах значений) параметра асимметрии пилообразного профиля, фазовых сдвигах управляющей компоненты и частотах временных флуктуаций. При этом содержательные выводы получены на основе только лишь свойств симметрии периодических составляющих аддитивно-мультипликативной потенциальной энергии, а также общих свойств векторной и сдвиговой симметрий и скрытой симметрии Куберо – Рензони. Справедливость симметричных выводов, не требующих для их получения знания точных формул для средней скорости рэтчета, подтверждена результатами вычислительного эксперимента на примере стохастического броуновского рэтчета пульсирующего типа.

Библиографические ссылки

1. Reimann P. Brownian motors: noisy transport far from equilibrium. *Physics Reports*. 2002;361(2–4):57–265. DOI: 10.1016/S0370-1573(01)00081-3.
2. Lau B, Kedem J, Schwabacher D, Kwasniewski D, Weiss EA. An introduction to ratchets in chemistry and biology. *Materials Horizons*. 2017;4:310–318. DOI: 10.1039/C7MH00062F.
3. Reimann P. Supersymmetric ratchets. *Physical Review Letters*. 2001;86(22):4992–4995. DOI: 10.1103/PhysRevLett.86.4992.
4. Denisov S, Flach S, Hänggi P. Tunable transport with broken space-time symmetries. *Physics Reports*. 2014;538(3):77–120. DOI: 10.1016/j.physrep.2014.01.003.
5. Cubero D, Renzoni F. Hidden symmetries, instabilities, and current suppression in Brownian ratchets. *Physical Review Letters*. 2016;116(1):010602. DOI: 10.1103/PhysRevLett.116.010602.
6. Розенбаум ВМ, Шапочкина ИВ, Тераниши Ё, Трахтенберг ЛИ. Симметрия пульсирующих рэтчетов. *Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики*. 2018;107(8):525–531. DOI: 10.7868/S0370274X18080118.
7. Rozenbaum VM, Shapochkina IV, Teranishi Y, Trakhtenberg LI. Symmetry of deterministic ratchets. *Physica Review E*. 2019;100(2):022115. DOI: 10.1103/PhysRevE.100.022115.
8. Chou C-F, Bakajin O, Turner SWP, Duke TAJ, Chan SS, Cox EC, et al. Sorting by diffusion: a asymmetric obstacle course for continuous molecular separation. *Proceedings National Academy of Sciences of the United States of America*. 1999;96(24):13762–13765. DOI: 10.1073/pnas.96.24.13762.
9. Matthias S, Müller F. Asymmetric pores in a silicon membrane acting as massively parallel Brownian ratchets. *Nature*. 2003;424(6944):53–57. DOI: 10.1038/nature01736.
10. Cheetham MR, Bramble JP, McMillan DGG, Bushby RJ, Olmsted PD, Jeuken LJC, et al. Manipulation and sorting of membrane proteins using patterned diffusion-aided ratchets with AC fields in supported bilayers. *Soft Matter*. 2012;8(20):5459–5465. DOI: 10.1039/C2SM25473E.
11. Roth JS, Zhang Y, Bao P, Cheetham MR, Han X, Evans SD. Optimization of Brownian ratchets for the manipulation of charged components within supported lipid bilayers. *Applied Physics Letters*. 2015;106(18):183703. DOI: 10.1063/1.4919801.
12. Hänggi P, Marchesoni F. Artificial Brownian motors: controlling transport on the nanoscale. *Review of Modern Physics*. 2009;81(1):387–442. DOI: 10.1103/RevModPhys.81.387.
13. Cubero D, Renzoni F. *Brownian ratchets: from statistical physics to bio- and nanomotors*. Cambridge: Cambridge University Press; 2016. 200 p.
14. Розенбаум ВМ, Шапочкина ИВ, Трахтенберг ЛИ. Метод функций Грина в теории броуновских моторов. *Успехи физических наук*. 2019;189(5):529–543. DOI: 10.3367/UFNr.2018.04.038347.
15. Гуляев ЮВ, Бугаев АС, Розенбаум ВМ, Трахтенберг ЛИ. Управление нанотранспортом с помощью рэтчет-эффекта. *Успехи физических наук*. 2020;190(4):337–354. DOI: 10.3367/UFNr.2019.05.038570.
16. Rozenbaum VM, Makhovskii YuA, Shapochkina IV, Sheu S-Y, Yang D-Y, Lin SH. Diffusion of a massive particle in a periodic potential: application to adiabatic ratchets. *Physical Review E*. 2015;92(6):062132. DOI: 10.1103/PhysRevE.92.062132.

17. Rozenbaum VM, Shapochkina IV, Sheu S-Y, Yang D-Y, Lin SH. High-temperature ratchets with sawtooth potentials. *Physical Review E*. 2016;94(5):052140. DOI: 10.1103/PhysRevE.94.052140.
18. Lee C-S, Janko B, Derenyi I, Barabasi A-L. Reducing vortex density in superconductors using the ratchet effect. *Nature*. 1999; 400(6742):337–340. DOI: 10.1038/22485.
19. Rozenbaum VM, Shapochkina IV, Teranishi Y, Trakhtenberg LI. High-temperature ratchets driven by deterministic and stochastic fluctuations. *Physical Review E*. 2019;99(1):012103. DOI: 10.1103/PhysRevE.99.012103.
20. Иким МИ, Дехтярь МЛ, Розенбаум ВМ, Бугаев АС, Трахтенберг ЛИ. Симметрия броуновских фотомоторов. *Химическая физика*. 2020;39(3):80–84. DOI: 10.31857/S0207401X20030073.

References

1. Reimann P. Brownian motors: noisy transport far from equilibrium. *Physics Reports*. 2002;361(2–4):57–265. DOI: 10.1016/S0370-1573(01)00081-3.
2. Lau B, Kedem J, Schwabacher D, Kwasniewski D, Weiss EA. An introduction to ratchets in chemistry and biology. *Materials Horizons*. 2017;4:310–318. DOI: 10.1039/C7MH00062F.
3. Reimann P. Supersymmetric ratchets. *Physical Review Letters*. 2001;86(22):4992–4995. DOI: 10.1103/PhysRevLett.86.4992.
4. Denisov S, Flach S, Hänggi P. Tunable transport with broken space-time symmetries. *Physics Reports*. 2014;538(3):77–120. DOI: 10.1016/j.physrep.2014.01.003.
5. Cubero D, Renzoni F. Hidden symmetries, instabilities, and current suppression in Brownian ratchets. *Physical Review Letters*. 2016;116(1):010602. DOI: 10.1103/PhysRevLett.116.010602.
6. Rozenbaum VM, Shapochkina IV, Teranishi Y, Trakhtenberg LI. [Symmetry of pulsating ratchets]. *Pis'ma v Zhurnal eksperimental'noi i teoreticheskoi fiziki*. 2018;107(8):525–531. Russian. DOI: 10.7868/S0370274X18080118.
7. Rozenbaum VM, Shapochkina IV, Teranishi Y, Trakhtenberg LI. Symmetry of deterministic ratchets. *Physical Review E*. 2019; 100(2):022115. DOI: 10.1103/PhysRevE.100.022115.
8. Chou C-F, Bakajin O, Turner SWP, Duke TAJ, Chan SS, Cox EC, et al. Sorting by diffusion: a asymmetric obstacle course for continuous molecular separation. *Proceedings National Academy of Sciences of the United States of America*. 1999;96(24):13762–13765. DOI: 10.1073/pnas.96.24.13762.
9. Matthias S, Müller F. Asymmetric pores in a silicon membrane acting as massively parallel Brownian ratchets. *Nature*. 2003; 424(6944):53–57. DOI: 10.1038/nature01736.
10. Cheetham MR, Bramble JP, McMillan DGG, Bushby RJ, Olmsted PD, Jeuken LJC, et al. Manipulation and sorting of membrane proteins using patterned diffusion-aided ratchets with AC fields in supported bilayers. *Soft Matter*. 2012;8(20):5459–5465. DOI: 10.1039/C2SM25473E.
11. Roth JS, Zhang Y, Bao P, Cheetham MR, Han X, Evans SD. Optimization of Brownian ratchets for the manipulation of charged components within supported lipid bilayers. *Applied Physics Letters*. 2015;106(18):183703. DOI: 10.1063/1.4919801.
12. Hänggi P, Marchesoni F. Artificial Brownian motors: controlling transport on the nanoscale. *Review of Modern Physics*. 2009; 81(1):387–442. DOI: 10.1103/RevModPhys.81.387.
13. Cubero D, Renzoni F. *Brownian ratchets: from statistical physics to bio- and nanomotors*. Cambridge: Cambridge University Press; 2016. 200 p.
14. Rozenbaum VM, Shapochkina IV, Trakhtenberg LI. [Green's function method in the theory of Brownian motors]. *Uspekhi fizicheskikh nauk*. 2019;189(5):529–543. Russian. DOI: 10.3367/UFNr.2018.04.038347.
15. Gulyaev YuV, Bugaev AS, Rozenbaum VM, Trakhtenberg LI. [Nanotransport controlled by means of the ratchet effect]. *Uspekhi fizicheskikh nauk*. 2020;190(4):337–354. Russian. DOI: 10.3367/UFNr.2019.05.038570.
16. Rozenbaum VM, Makhnovskii YuA, Shapochkina IV, Sheu S-Y, Yang D-Y, Lin SH. Diffusion of a massive particle in a periodic potential: application to adiabatic ratchets. *Physical Review E*. 2015;92(6):062132. DOI: 10.1103/PhysRevE.92.062132.
17. Rozenbaum VM, Shapochkina IV, Sheu S-Y, Yang D-Y, Lin SH. High-temperature ratchets with sawtooth potentials. *Physical Review E*. 2016;94(5):052140. DOI: 10.1103/PhysRevE.94.052140.
18. Lee C-S, Janko B, Derenyi I, Barabasi A-L. Reducing vortex density in superconductors using the ratchet effect. *Nature*. 1999; 400(6742):337–340. DOI: 10.1038/22485.
19. Rozenbaum VM, Shapochkina IV, Teranishi Y, Trakhtenberg LI. High-temperature ratchets driven by deterministic and stochastic fluctuations. *Physical Review E*. 2019;99(1):012103. DOI: 10.1103/PhysRevE.99.012103.
20. Иким МИ, Дехтярь МЛ, Розенбаум ВМ, Бугаев АС, Трахтенберг ЛИ. [Symmetry of Brownian photo motors]. *Khimicheskaya fizika*. 2020;39(3):80–84. Russian. DOI: 10.31857/S0207401X20030073.

Статья поступила в редакцию 29.11.2020.
Received by editorial board 29.11.2020.