

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ
БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И
ИНФОРМАТИКИ

Кафедра дискретной математики и алгоритмики

ГАПОНЕНКО Алексей Павлович

ПАРСОЧЕТАНИЯ С ПРЕДПИСАННЫМИ СВОЙСТВАМИ В
ГРАФАХ

Магистерская диссертация

специальность 1-31 80 09 «Прикладная математика и информатика»

Научный руководитель:
Орлович Юрий Леонидович
заведующий кафедрой БМИ,
кандидат физ.-мат. наук,
доцент

Допущена к защите

” _____ ” _____ 2021 г.

Зав. кафедрой дискретной математики и алгоритмики,

доктор физ.-мат. наук, профессор

В.М. Котов _____

Минск, 2021

РЕФЕРАТ

Магистерская диссертация, 52 страницы, 32 рисунка, 13 источников.

Ключевые слова: ПАРОСОЧЕТАНИЕ, НАИБОЛЬШЕЕ ПАРОСОЧЕТАНИЕ, ИНДУЦИРОВАННОЕ ПАРОСОЧЕТАНИЕ, НЕСВЯЗНОЕ ПАРОСОЧЕТАНИЕ, k -ДИСТАНЦИОННОЕ ПАРОСОЧЕТАНИЕ, ВЗВЕШЕННОЕ ИНДУЦИРОВАННОЕ ПАРОСОЧЕТАНИЕ.

Объект и предмет исследования: к объекту исследования относятся различные типы паросочетаний. К предмету исследования относятся сложностной статус задач, связанных с паросочетаниями, и характеристики рассматриваемых классов графов.

Цель работы: получение новых и обобщение уже известных результатов, связанных с несвязными, k -дистанционными и индуцированными паросочетаниями.

Результаты: доказана полиномиальная разрешимость задачи нахождения наибольшего несвязного паросочетания в классе деревьев. Установлена NP -полнота задачи нахождения наибольшего индуцированного паросочетания в определённом классе графов. Получены новые результаты для взвешенных индуцированных паросочетаний, несвязных паросочетаний и k -дистанционных паросочетаний.

Область применения: «Области эффективности» задач о различных видах паросочетаний – то есть классы графов, для которых указанные задачи могут быть решены за полиномиальное время.

РЭФЕРАТ

Магістарская дысертацыя, 52 старонкі, 32 малюнка, 13 крыніц.

Ключавыя словы: ПАРАСАЧЫТАНЕ, НАЙБОЛЬШЫЯ ПАРАСАЧЫТАНЯ, ІНДУКАВАНАЕ ПАРАСАЧЫТАНЕ, НЯЗВЯЗАНАЕ ПАРАСАЧЫТАНЕ, k -ДЫСТАНЦЫЙНАЕ ПАРАСАЧЫТАНЕ, УЗВАЖАНАЕ ІНДУКАВАНАЕ ПАРАСАЧЫТАНЕ.

Аб'ект і прадмет даследавання: да аб'екту даследавання ставяцца розныя парасачытаня. Прадметам даследавання з'яўляюцца складаваны статус задач аб парасачытанях і характарызацыі класаў графаў.

Мэта работы: атрыманне новых і абагульненне ўжо вядомых вынікаў аб незвязаных парасачытаняў, k -дыстанцыйных парасачытаняў і індукаваных парасачытаняў.

Вынік: даказана паляномная вырашальнасць задачы знаходжання незкладанага парасачытаня у класе дрэў. Усталявана NP -паўната задачы знаходжання найбольшага індукаванага парасачытаня ў пэўным класе графаў. Атрыманы новыя вынікі для ўзважанага індукаванага парасачытаня, незвязанага парасачытаня і k -дыстанцыйнага парасачытаня.

Вобласць прымянення: «Вобласці эфектыўнасці» задач аб розных відах парасачытаняў – інакш кажучы класаў графаў, для якіх пазначыная задача можа быць вырашана за паляномны час.

ABSTRACT

Master thesis, 52 pages, 32 drawings, 13 sources.

Keywords: MATCHING, MAXIMUM CARDINALITY MATCHING, INDUCED MATCHING, WEIGHTED INDUCED MATCHING, K -DISTANCE MATCHING, DISCONNECTED MATCHING.

Object and subject of research: object of this research is various types of matchings. Subjects of this research are computational complexity of problems related to matchings and characterizations of graph classes.

Objective: obtaining new and improving some well known results related to disconnected matching, k -distance matching and induced matching.

The result: It was proved that the problem about disconnected matching can be solved in polynomial time if the graph is a tree. Also was obtained NP -complexity of the induced matching problem in a specific graph class. New results are received on weighted induced matching, disconnected matching and k -distance matching.

The scope: «Efficiency domains» of various types of matchings problems that is graph classes for which these problems can be solved in polynomial time.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	6
1 ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ О ГРАФАХ	7
1.1 Основные определения	7
1.2 Паросочетание	9
1.3 Известные утверждения	12
1.4 Приложение паросочетаний	14
2 НЕСВЯЗНЫЕ ПАРСОЧЕТАНИЯ	16
2.1 Несвязное паросочетание	16
2.2 Несвязное паросочетание в дереве	17
2.3 Характеризация класса	22
3 ИНДУЦИРОВАННОЕ ПАРСОЧЕТАНИЕ	34
4 К-ДИСТАНЦИОННЫЕ ПАРСОЧЕТАНИЯ	40
5 ВЗВЕШЕННОЕ ИНДУЦИРОВАННОЕ ПАРСОЧЕТАНИЕ	47
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	51
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	52

ВВЕДЕНИЕ

Паросочетанием в графе называется произвольное подмножество попарно несмежных ребер. Среди многочисленных направлений исследований в теории графов паросочетания занимают видное место. Задача нахождения наибольшего по мощности паросочетания в графе имеет широкие практические и теоретические применения. Эта задача возникает, например, при проектировании коммуникационных сетей и размещении производственного оборудования, при планировании и оптимальной организации работы транспортных средств, при организации параллельных и конвейерных вычислений. Теория паросочетаний инициировала исследование структурных и алгоритмических свойств графов и привела ко многим важным результатам.

Настоящая магистерская диссертация посвящена исследованию специальных паросочетаний в различных классах графов. Под специальным паросочетанием понимается подмножество попарно несмежных ребер графа с дополнительным условием, накладываемым на подграф, порожденный концевыми вершинами паросочетания. Если указанный подграф обладает теоретико-графовым свойством P , то соответствующее паросочетание называется P -паросочетанием. К таким паросочетаниям (в зависимости от свойства P) относятся индуцированные паросочетания, несвязные паросочетания, ациклические паросочетания, связные паросочетания и др.

Указанные типы паросочетаний достаточно интенсивно исследуются в настоящее время, о чем свидетельствует наличие около сотни публикаций по данной тематике только в ведущих международных журналах. Магистерская диссертация посвящена установлению сложностного статуса задач, связанных с P -паросочетаниями. В частности, задач где нужно найти наибольшее по мощности P -паросочетание в графах из рассматриваемого класса.

Ещё одно направление исследований в диссертации связано с графами, все максимальные несвязные паросочетания которых имеют одинаковую мощность. Рассматриваемый класс графов не является наследственным, т. е. не замкнут относительно операции удаления вершины. В магистерской диссертации установлено, что рассматриваемый класс содержит единственный максимальный по включению наследственный подкласс — класс идеальных графов равноможных максимальных несвязных паросочетаний — и найдена характеристика этого подкласса в терминах конечного множества минимальных запрещенных порожденных подграфов. Отсюда, в частности, вытекает полиномиальная разрешимость задачи распознавания класса идеальных графов равноможных максимальных несвязных паросочетаний.

1 ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ О ГРАФАХ

1.1 Основные определения

Пусть $G = (V, E)$ – граф с множеством вершин V и множеством рёбер E . *Порядком* графа G называется число вершин в этом графе и обозначается $|V|$. Рёбро между двумя вершинами v, u графа G обозначается как vu . Две вершины u и v графа G называются *смежными*, если $uv \in E(G)$. Рёбра e и e_1 графа G называются *смежными*, если они оба имеют общую вершину. Говорят, что вершина v инцидентна ребру e графа G , если ребро e – это ребро между вершиной v и какой-то другой вершиной. *Окружением* вершины $v \in V(G)$ называется множество вершин смежных с вершиной v и обозначается как $N(v)$. Степенью вершины v графа G является мощность её окружения и обозначается как $deg(v)$.

Граф G называется *связным*, если для любых двух его вершин существует простая цепь соединяющая эти вершины, в противном случае граф называют *несвязным*.

Подграфом графа $G(V, E)$ называется граф $G_1(V_1, E_1)$, такой что $V_1 \in V$ и $E_1 \in E$. Если при этом ещё и выполняется, что $\forall v, u \in V_1 vu \in E$ следует, что $uv \in E_1$, то граф G_1 называется *порождённым подграфом*.

Компонентой связности в графе G называется максимальный (по включению) связный подграф графа G . Компоненту связности которая состоит только из одной вершины будем называть *изолированной вершиной*.

Граф называется *ациклическим*, если в нём нет циклов. Связный, ациклический граф называется *деревом*, а граф, который состоит из деревьев – *лесом*. *Деревья* – класс графов состоящий только из деревьев.

Говорят, что граф $G = (V_G, E_G)$ изоморфен графу $H = (V_H, E_H)$, если существует биективная функция $f : V_G \rightarrow V_H$ такая, что $u, v \in G$ смежны друг другу тогда и только тогда, когда вершины $f(u)$ и $f(v)$ смежны в графе H .

Граф называется *плоским*, если никакие два ребра этого графа не пересекаются (допускается пересечение в вершинах). Граф изоморфный плоскому графу называется *планарным*.

Граф G называется *полным*, если $\forall v, u \in V(G)$ вершины u и v являются смежными. Полный граф порядка n обозначается как K_n .

Граф G порядка n является *простой цепью*, если он является связным, а также ровно две его вершины имеют степень 1, и ровно $n - 2$ вершины имеют степень 2. Обозначается такой граф как P_n .

Граф G называется двудольным, если существуют такие два непересекающихся подмножества A и B множества $V(G)$, что никакие две вершины из одного подмножества не являются смежными и $A \cup B = V(G)$.

Граф G называется $2K_2$, если он состоит из двух компонент связности K_2 .

Граф G с долями A и B называется *полным двудольным*, если любые две вершины из разных долей смежны. Обозначается такой граф как $K_{n,m}$, где $|A| = n$, $|B| = m$.

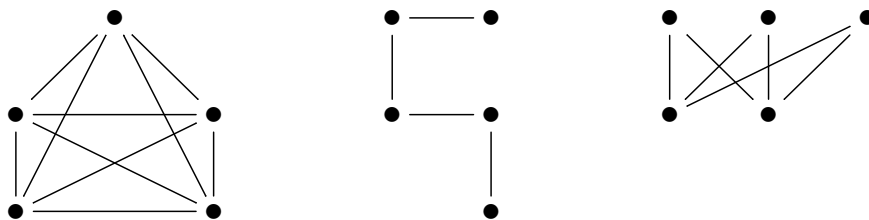


Рисунок 1

На рисунке 1 слева направо изображены K_5 , P_5 и $K_{2,3}$ графы.

Граф $L(G)$ называется рёберным графом G , если выполняются следующие утверждения:

- 1) Множество вершин графа $L(G)$ есть множество рёбер графа G .
- 2) Две вершины $v, u \in V(L(G))$ смежны тогда и только тогда, когда соответствующие им рёбра смежны в графе G .

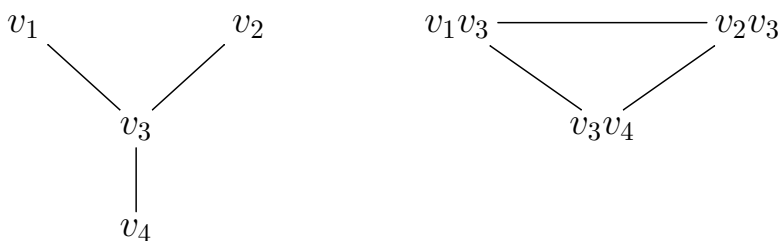


Рисунок 2

На рисунке 2 слева изображен граф G , а справа его рёберный граф $L(G)$.

Расстоянием между двумя вершинами $u, v \in V(G)$ называется число рёбер в кратчайшем пути между двумя этими вершинами и обозначается $dist(u, v)$. *Расстоянием* в графе $G(V, E)$ между вершиной $v \in V$ и ребром $e \in E$ называется длина кратчайшего пути между v и любой вершиной ребра e , и обозначается как $dist(v, e)$. *Расстоянием* между рёбра-

ми $e_1, e_2 \in E$ в графе $G(V, E)$ называется длина кратчайшего пути между e_1 и любой вершиной ребра e_2 и обозначается как $dist(e_1, e_2)$. *Расстоянием* между двумя непересекающимися множествами рёбер K_1 и K_2 определим как $min(\{dist(e_1, e_2) | \forall e_1 \in K_1, \forall e_2 \in K_2\})$, и будем обозначать как $dist(K_1, K_2)$. *Расстоянием* между двумя графами G и H будем называть величину $min(\{dist(v_1, v_2) | \forall v_1 \in V(G), \forall v_2 \in V(H)\})$.

Граф G будем называть (H_1, \dots, H_k) -*свободным*, если граф G не содержит H_1, \dots, H_k в качестве порождённых подграфов.

1.2 Паросочетание

Пусть дан граф $G = (V, E)$. *Паросочетание* M в графе G – это множество попарно несмежных рёбер, иначе говоря, рёбер у которых нет общих вершин.

Мощностью паросочетания M называется количество рёбер, входящих в это паросочетание. Мощность паросочетания M обозначается как $|M|$.

Паросочетание M графа G называется *максимальным*, если оно не содержится ни в каком другом паросочетании графа G , иными словами, к этому паросочетанию невозможно добавить ни какое другое ребро графа G , которое бы не являлось смежным со всеми другими рёбрами этого паросочетания.

Паросочетание M графа G , которое содержит максимальное количество рёбер называется *наибольшим* паросочетанием. То есть если M наибольшее паросочетание графа G , то в графе G не существует такого паросочетания M_1 , что $|M_1| > |M|$.

Любое наибольшее паросочетание является максимальным, однако не каждое максимальное паросочетание является наибольшим.

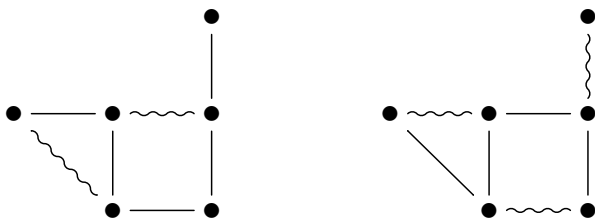


Рисунок 3

Пример того, что не каждое максимальное паросочетание является наибольшим. Слева на рисунке 3 изображено (волнистыми рёбрами) максимальное

ное паросочетание, однако оно не является наибольшим. Справа на рисунке 3 изображено уже наибольшее паросочетание.

Задачу поиска максимального паросочетания чаще всего можно решить за полиномиальное время с помощью техники жадного алгоритма. Задача же поиска мощности наибольшего паросочетания является полиномиально разрешимой [13].

Пусть M – это паросочетание в графе G . Обозначим граф порождённый множеством вершин рёбер в M , как $G[M]$.

Паросочетание M называется *совершенным*, если $|G| = |G[M]|$. Нетрудно видеть, что любое совершенное паросочетание является наибольшим.

Почти совершенным паросочетанием называется такое паросочетание M , что $|G| - 1 = |G[M]|$.

M называется *P -паросочетанием*, если $G[M]$ имеет свойство P , где P – это какое-то свойство в графе G (например двудольность). *Наибольшим P -паросочетанием* в графе G называется наибольшее (по количеству рёбер) паросочетание, среди тех паросочетаний, для которых выполняется свойство P . *Максимальным P -паросочетанием* в графе G называется P -паросочетание, которое не содержится ни в одном другом P -паросочетании графа G . Мощность наибольшего *P -паросочетания* будем обозначать как $B_P(G)$ и будем называть *числом P -паросочетания*. Мощность наименьшего *P -паросочетания* среди всех максимальных *P -паросочетаний* в графе G будем обозначать $\bar{B}_P(G)$.

Приведем определения основных P -паросочетаний, которые и будут в основном изучаться нами в этой работе:

1) Если сказать, что свойство P – это свойство быть графом, то *P -паросочетание* – это обычное паросочетание, а *число паросочетания* в этом случае будем обозначать как $B_1(G)$.

2) Паросочетание M называется *индуцированным*, если никакие два ребра $e_1, e_2 \in M$ не имеют общего смежного ребра в графе G (другими словами $dist(e_1, e_2) \geq 2$), а *число индуцированного паросочетания* в этом случае будем обозначать как $B_*(G)$.

3) Паросочетание M называется *связным*, если $G[M]$ связный граф, а *число связного паросочетания* в этом случае будем обозначать как $B_c(G)$.

4) Паросочетание M называется *несвязным*, если $|M| = 1$ или $G[M]$

несвязный граф, а *число несвязного паросочетания* в этом случае будем обозначать как $B_{dc}(G)$.

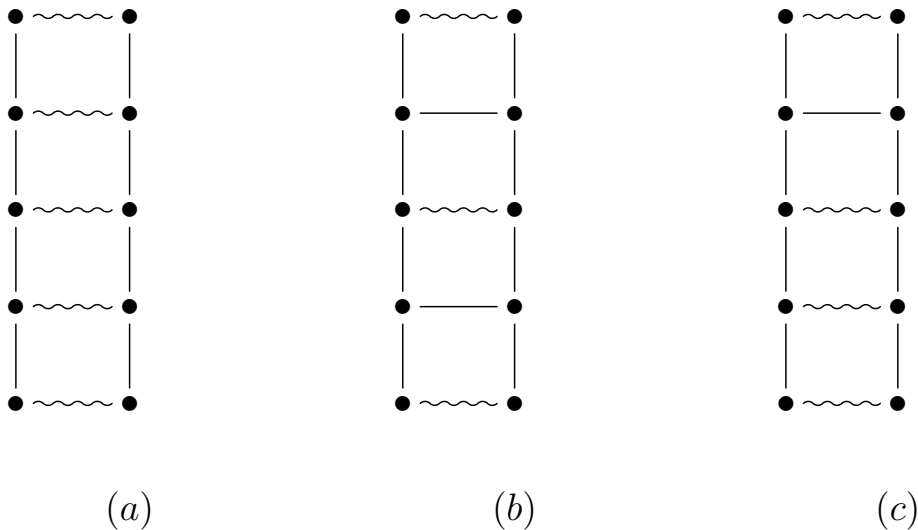
5) Паросочетание M называется *ациклическим* если $G[M]$ – ациклический граф (граф в котором нет циклов), а *число ациклического паросочетания* в этом случае будем обозначать как $B_{ac}(G)$.

6) Паросочетание M называется *изолированным*, если либо паросочетание состоит ровно из одного ребра, либо если граф $G[M]$ не имеет ни одной компоненты связности изоморфной K_2 . *Число изолированного паросочетания* обозначается $B_{if}(G)$.

7) Паросочетание M называется *строго наибольшим*, если граф $G[M]$ имеет ровно одно наибольшее паросочетание. *Число строго наибольшего паросочетания* обозначается как $B_{ur}(G)$. [2]

Мощность наименьшего максимального паросочетания в графе G обозначается как $\bar{B}_1(G)$, а числа наименьших максимальных P -паросочетаний где P – это свойство индуцированности, связности, несвязности, ациклическости, изолированности и свойство быть строго наибольшим, обозначаются как $\bar{B}_*(G)$, $\bar{B}_c(G)$, $\bar{B}_{dc}(G)$, $\bar{B}_{ac}(G)$, $\bar{B}_{if}(G)$ и $\bar{B}_{ur}(G)$ соответственно.

На рисунке 4 изображен граф G , для которого B_{dc}, B_1 и B_* попарно различны, а точнее $B_1 = 5, B_* = 3, B_{dc} = 4$.



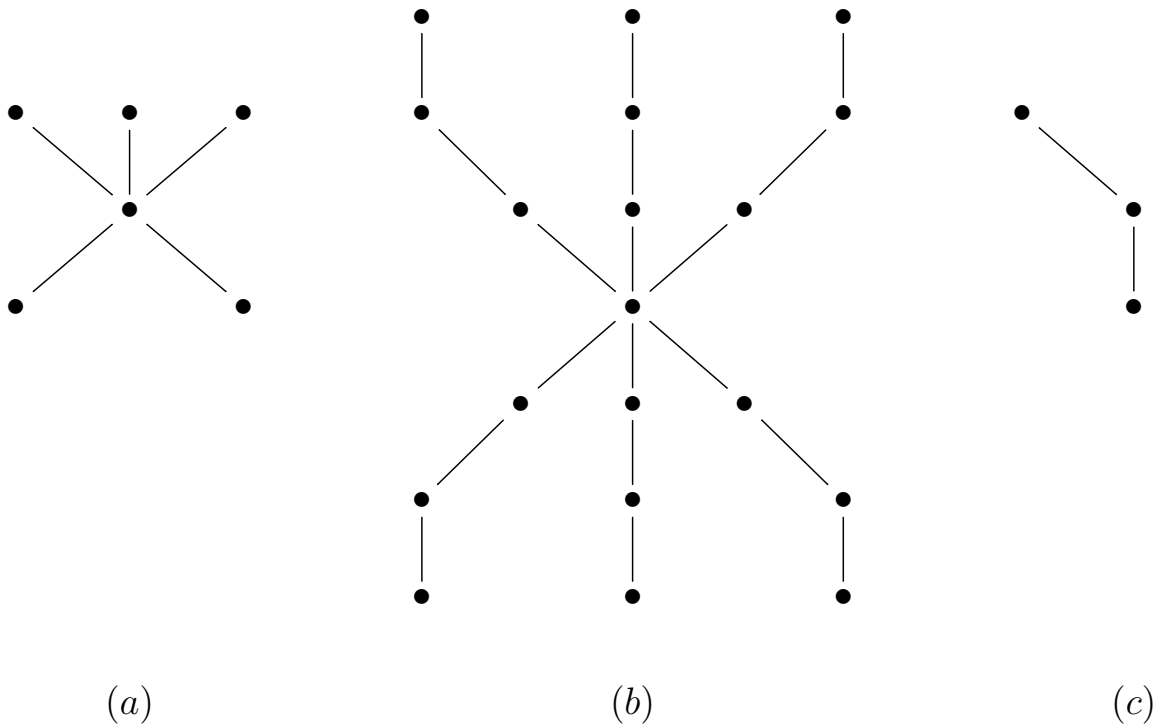
Рисунке 4

Волнистые рёбра означают, что они входят в паросочетание. На рисунках (a), (b), (c) отображены наибольшее паросочетание, наибольшее индуцированное паросочетание, наибольшее несвязное паросочетание соответственно.

Граф G назовём *графом равномоцных максимальных паросочетаний*, если все максимальные паросочетания этого графа имеют одинаковую мощность.

Будем называть G – *графом равномоцных максимальных индуцированных паросочетаний*, если все максимальные индуцированные паросочетания этого графа имеют одинаковую мощность. Класс таких графов будем обозначать как A_2 . Задача распознавания такого графа является *co-NP*-полной. Подробно об этом можно ознакомиться в статье [9].

Граф G назовём *идеальным графом равномоцных максимальных индуцированных паросочетаний*, Если любой порождённый подграф H графа G является *графом равномоцных максимальных индуцированных паросочетаний*. Такой класс графов будем обозначать A_2^* .



Рисунке 5

На рисунке (a) изображен граф равномоцных максимальных паросочетаний, на рисунке (b) изображен граф равномоцных максимальных индуцированных паросочетаний, а на рисунке (c) (P_4) -свободный граф.

1.3 Известные утверждения

Для любого графа G имеет место следующие неравенства:

$$\begin{aligned} B_* &\leq B_{ac} \leq B_{ur} \leq B_1, \\ B_* &\leq B_{dc} \leq B_1, \\ B_c &\leq B_{if} \leq B_1. \end{aligned}$$

Все данные утверждения могут быть получены из того факта, что если для P -паросочетания и P_1 -паросочетания выполняется $P \subset P_1$, то $B_P \leq B_{P_1}$ [2].

Теорема 1. Если G связный, то $B_c(G) = B_{if}(G) = B_1(G)$. [2]

Интерес также представляет сложностной статус задач связанных с P -паросочетаниями. Задача поиска мощности наибольшего обычного паросочетания является полиномиально разрешимой [13]. Однако и задача поиска числа строго наибольшего паросочетания, и задача поиска индуцированного паросочетания являются NP -трудными [2, 10].

В частности, следующая теорема показывает, что задача проверки достоверности неравенства $B_* \geq k$ является NP -полной в определённом классе графов. В главе про индуцированные паросочетания мы улучшим этот результат.

Теорема 2. Задача проверки достоверности неравенства $B_* \geq k$ в классе планарных рёберных графов от планарных двудольных, максимальная степень вершин которых не превышает четыре является NP -полной [1].

Достаточно интересным является понятие несвязного паросочетания. Сложностной статус задачи поиска числа наибольшего несвязного паросочетания является открытым вопросом до сих пор. Одним из интересных результатов для несвязного паросочетания, является следующая теорема.

Теорема 3. Для любого графа G , который принадлежит классу деревьев выполняется: $B_1(G) - 1 \leq B_{dc}(G) \leq B_1(G)$. [2]

Однако даже зная, что в классе деревьев число наибольшего несвязного паросочетания может принимать только два значения (которые могут быть получены за полиномиальное время), сложностной статус этой задачи в классе деревьев был неизвестен. В дальнейшем мы покажем, что эта задача полиномиально разрешима и приведём алгоритм.

Также существуют некоторые результаты для наименьших максимальных паросочетаний. Например известно, что:

Теорема 4. Если G связный, то $\bar{B}_1(G) \leq \bar{B}_{if}(G) \leq \bar{B}_c(G)$ [2].

Задача поиска $\bar{B}_{ac}(G)$ является NP -трудной [2] и такой же является задача поиска $\bar{B}_1(G)$ [12].

Важно будет упомянуть следующий результат, обобщения которого мы получим сразу для нескольких паросочетаний.

Теорема 5. Граф $G \in A_2^*$ тогда и только тогда, когда G является (H_1^1, H_2^1, H_3^1) -свободным [9], где:

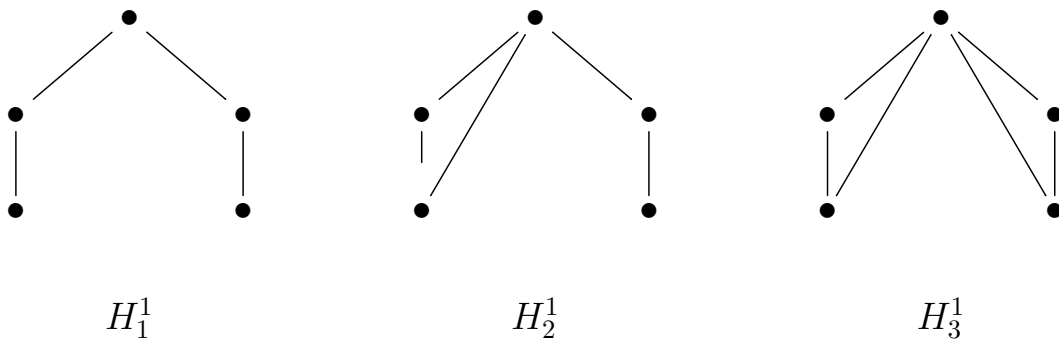


Рисунок 6

1.4 Приложение паросочетаний

Помимо научного интереса мотивацией к изучению паросочетаний служит необходимость применение знаний о них на практике. В частности задача поиска индуцированного паросочетания и задача поиска взвешенного индуцированного паросочетания применима в сетевых задачах. В этой задаче предполагается, что есть двудольный граф G с множеством рёбер E и долями X и Y . Все вершины доли X – это широкоэмиттерные передатчики, а все вершины Y – это приёмники. Передача информации от всех вершин доли X идёт одновременно, поэтому никакой приёмник не может принимать сигнал более чем от одного передатчика. При этом нет смысла принимать одну и ту же информацию двум различным приёмникам. Целью данной задачи является нахождения наибольшего числа пар, каждая из которых состоит из одного передатчик и одного приёмника. Учитывая всё выше сказанное, мы получаем, что решением задачи является наибольшее индуцированное

паросочетание. А если предположить, что передача сигнала от передатчика к приёмнику стоит какое-то количество ресурсов, то мы получим и вовсе взвешенное индуцированное паросочетание.

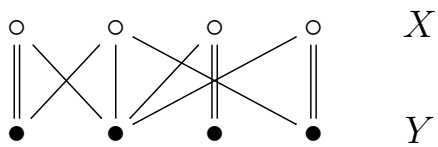


Рисунок 7

Двойной линией отмечены ребра, которые входят в наибольшее индуцированное паросочетание.

В этой главе мы рассмотрели всё, что связано с паросочетаниями. Указали известные теоремы и результаты, которые понадобятся нам в дальнейшем.

2 НЕСВЯЗНЫЕ ПАРОСОЧЕТАНИЯ

2.1 Несвязное паросочетание

В этой главе мы получим новые результаты для несвязных паросочетаний для некоторых классов графов. Докажем что задача нахождения числа несвязного паросочетания $\in P$ (Полиномиальному классу задач) в классе деревьев, приведём алгоритм нахождения не только числа несвязного паросочетания, но и самого наибольшего несвязного паросочетания (Или одного из, если таковых несколько) и докажем асимптотическую сложность этого алгоритма. В следующей подглаве мы введём характеристику класса графов, в которых каждый порождённый подграф обладает тем свойством, что любые два его максимальных несвязных паросочетания равномощны и докажем её корректность. Подобная характеристика уже известна для индуцированных паросочетаний [1], мы же докажем её аналог для несвязных паросочетаний.

Так как наличие изолированных вершин в любом P -паросочетании никак не влияет на результат (в силу того, что нет ни одного ребра смежного с этой вершиной), то в этой и последующих главах мы предполагаем, что графы не содержат изолированных вершин.

Теорема 1. Задача нахождения числа несвязного паросочетания в классе несвязных графов, которые содержат как минимум две компоненты связности порядка большего единицы является полиномиально разрешима.

Доказательство. Действительно, раз граф G несвязный и в нём есть как минимум две компоненты связности, которые не являются изолированными вершинами, то рассмотрим все их. Обозначи их как $K_1, \dots, K_m, m \in \mathbb{N}$. Найдём для графа G наибольшее обычное паросочетание. Существует множество алгоритмов, которые могут сделать это, но главное что все они полиномиальные. Получив одним из алгоритмов наибольшее паросочетание M , заметим, что как минимум одно из рёбер из каждой компоненты K_i входит в M (иначе M попросту не было бы наибольшим паросочетанием).

Теперь, раз класс графов у нас такой, что $m \geq 2$, то $G[M]$ является несвязным графом, то есть M также является несвязным паросочетанием. Так как известно, что $B_{dc}(G) \leq B_1(G)$ для любого G [2], то M является также наибольшим несвязным паросочетанием. А значит в нашем классе графов для поиска числа несвязного паросочетания можно применить любой из известных полиномиальных алгоритмов поиска наибольшего паросочетания.

Следствие 1. Любое наибольшее паросочетание в несвязном графе, который содержит как минимум две компоненты связности порядка большего единицы является несвязным.

Следствие 2. Для графов принадлежащих классу несвязных, которые содержат как минимум две компоненты связности порядка большего единицы выполняется: $B_1(G) = B_{dc}(G)$.

2.2 Несвязное паросочетание в дереве

Для этой задачи уже известно, что $B_1(G) - 1 \leq B_{dc}(G) \leq B_1(G)$ в классе деревьев [2], однако всё ещё не понятно даже для этого класса и с такой оценкой на параметр $B_{dc}(G)$ является ли задача поиска $B_{dc}(G)$ NP -трудной или нет.

Итак, пусть у нас есть дерево T и мы хотим найти B_{dc} в этом графе. Будем предполагать, что $|T| > 1$, так как со случаем $|T| = 1$ всё очевидно.

Лемма 1. В графе нет цепи длины 4 (длина в рёбрах) тогда и только тогда, когда $B_{dc} = 1$.

Доказательство.

1) В графе нет цепи длины 4, следовательно $B_{dc} = 1$.

Пусть всё же это не так и выполняется $B_{dc} > 1$. Обозначим M как наибольшее несвязной паросочетание в T , тогда $G[M]$ имеет как минимум две компоненты связности. Назовём их K_1 , K_2 и рассмотрим их. Сделаем ещё небольшое наблюдение, что компонента связности в $G[M]$ не может быть изолированной вершиной, так как $G[M]$ порождается на рёбрах (по сути на парах вершин, которые изначально смежны друг другу). Рассмотрим величину $dist(K_1, K_2)$. Эта величина не меньше 2, иначе K_1 и K_2 не были бы отдельными компонентами связности. Тогда взяв одно ребро из K_1 , одно ребро из K_2 и соединяющую их цепь P (Количество рёбер в $P \geq 2$), мы получим, что в дереве T существует цепь длины 4 – противоречие.

2) $B_{dc} = 1$, следовательно в графе нет цепи длины 4.

Если $\exists P$ цепь в T такая что $|P| \geq 4$, то $B_{dc} \geq 2$ (Это верно в силу того, что в дереве между двумя рёбрами существует и причём единственный минимальный путь). \square

Алгоритм для проверки существования пути длины 4 в дереве Обход в ширину, который работает не больше 4 итераций. Изначально дерево подвешивается за вершину.

Асимптотика. $O(n)$ – время выполнения. $O(n)$ – объём памяти.

Рассмотрим теперь в графе $G[M]$ такие две компоненты связности K_1 и K_2 , расстояние между которыми в G минимально. Цепь на которой достигается минимум назовём $P = v_1v_2\dots v_m$. Так как $|P| \geq 2$, то $m \geq 3$. Рассмотрим теперь вершину v_2 , которая не концевая в цепи P . Любое ребро $e \in N(v_2)$ не принадлежит M , так как рёбра v_1v_2, v_2v_3 очевидно не принадлежат M , а никакое другое ребро из окружения вершины v не может принадлежать M , так как иначе окажется, что это ребро принадлежит одной из компонент K_1, K_2 и тогда получится, что существует между этими двумя компонентами цепь v_2, \dots, v_m , которая короче минимальной цепи P , что противоречит тому, что P – минимальная цепь.

Т.е. так как наш граф – дерево, становится очевидно следующее:

Свойство 1. $\forall T$ в котором существует цепь длины 4, выполняется: $\exists v : |N(v)| \geq 2$ и $\forall u \in N(v) uv \notin M$, и удаление этой вершины приведёт к появлению как минимум двух компонент связности, мощность которых не меньше 1.

А значит по двум следствиям теоремы 1 получаем, что $B_1(T \setminus \{v\}) = B_{dc}(T \setminus \{v\})$ для какой-то вершины из свойства 1.

В дальнейшем будем предполагать, что граф подаётся на вход в качестве списка смежности.

Всеми этими рассуждениями приходим к следующему алгоритму:

Алгоритм нахождения числа несвязного паросочетания в дереве.

1) Проверить существует ли цепь длины 4 в этом дереве (Если "Да" то возвращаем 1, если "Нет" то переходим к пункту 2)).

2) Находим все вершины $v_i \in T$ такие, что v_i из свойства 1.

3) Для всех несвязных графов, получившихся путём удаления из T вершин в пункте 2) находим наибольшее паросочетание и $B_1(G_i)$.

4) Среди всех значений $B_1(G_i)$ находим максимальное и возвращаем его мощность и само паросочетание.

Первый шаг алгоритма можно выполнить за $O(n)$. Хотя и кажется с первого взгляда, что может существовать константный алгоритм, однако это не так. Например для графа "звезда" (граф является деревом и есть вершина смежная со всеми остальными) или для графа очень похожего на "звезду" (с константными изменениями).

Второй шаг реализуем так, чтобы время выполнения было $O(n^2)$. Сделаем это следующим образом: для каждой вершины $v \in G$ построим новый граф без вершины v и без смежных этой вершине рёбер. Если получившийся граф имеет как минимум две компоненты связности мощности не меньше 2, то это значит, что вершина v может быть той самой потенциальной вершиной из свойства 1 и поэтому в этом случае можно переходить к третьему шагу алгоритма. Отметим, что удаление вершины v будем проводить "inplace" для графа T , а в конце итерации просто добавим обратно вершину v и все те смежные ей ребра, которые были удалены вначале. Время выполнения алгоритма асимптотический не поменяется, однако тем самым мы сэкономим память.

Если третий шаг мы реализуем через известный алгоритм нахождения числа паросочетания в любом графе (Время выполнения которого $O(n^3)$), то суммарное время выполнения сразу возрастет к $O(n \cdot n^3)$. Однако этот шаг можно реализовать за "линейное" время с помощью обхода в глубину.

Достаточно легко понять как выполнить четвёртый шаг за "линейное" время.

Пусть на вход подаётся дерево T . Назовём вершину $v \in T$ *цветком*, если количество вершин $u \in N(v)$ таких что $deg(u) > 1$ не больше одной, а количество вершин $w \in N(v)$ таких, что $deg(w) = 1$ не меньше одной.

На рисунке 8 вершина v является цветком.

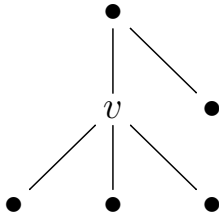


Рисунок 8

Утверждение 1. В любом дереве есть как минимум один цветок.

Доказательство. Подвесим граф за какую-нибудь вершину. Обозначим h , как высоту этого дерева. Тогда выберем в дереве вершину v , глубина которой $h-1$. Из всех смежных вершин вершине v , только одна вершина может иметь степень больше 1 (вершина, глубина которой равна $h-2$) и есть как минимум одна вершина степень которой единица (вершина глубина которой равна h) т.е. v и есть цветок.

□

Следствие 3. Удаление цветка в любом дереве не нарушает связности дерева (изолированные вершины не в счёт).

Утверждение 2. Существует наибольшее паросочетание M , такое что для любого цветка v , в паросочетание M входит ребро vu , где $u \in N(v)$ и u – лист.

Доказательство. Рассмотрим цветок v в дереве T . Если $v \notin T[M]$, где M – наибольшее паросочетание, то мы можем добавить в M ребро uv , где $u \in N(v)$ и u – лист. Если $wv \in M$, то заменим ребро wv на ребро uv , где u – лист. Таким образом паросочетание M изменится, но не изменится его мощность.

□

Алгоритм нахождения числа паросочетания в дереве

- 1) Найти цветок в дереве T_i и добавить в результат любое листовое ребро смежное цветку v .
- 2) Удалить цветок v (так как больше ни одно ребро смежное цветку v не может быть добавлено в результат) и получить дерево T_{i+1} .
- 3) Повторить операции 1) и 2) Пока дерево T_i имеет хоть одно ребро.

Асимптотика. $O(n)$ – время выполнения алгоритма. $O(n)$ – объем необходимой памяти.

2.3 Характеризация класса

В этой главе мы введём понятия *граф равномоцных максимальных несвязных паросочетаний* и *идеальный граф равномоцных максимальных несвязных паросочетаний*. А также докажем аналог известной уже теоремы для индуцированных паросочетаний [1] для несвязных паросочетаний.

Напомним, что паросочетание M называется несвязным, если $|M| = 1$ или $G[M]$ несвязный граф, а $B_{dc}(G)$ обозначает число несвязного паросочетания.

Граф G назовём *графом равномоцных максимальных несвязных паросочетаний*, если все максимальные несвязные паросочетания этого графа имеют одинаковую мощность, а класс таких графов будем обозначать как A_{dc} .

Граф назовём *идеальным графом равномоцных максимальных несвязных паросочетаний*, если любой порождённый подграф этого графа является графом равномоцных максимальных несвязных паросочетаний. Такой класс графов будем обозначать как A_{dc}^* .

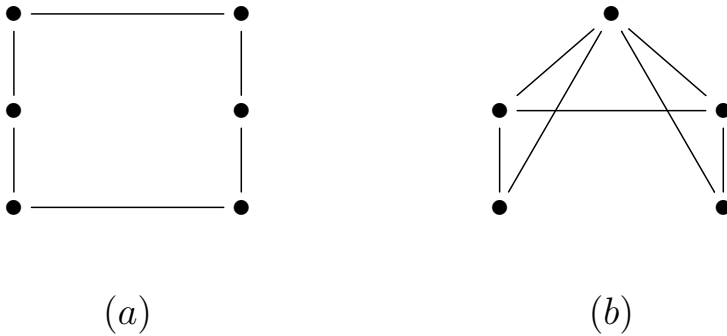


Рисунок 9

На рисунке (a) изображен граф равномоцных максимальных несвязных паросочетаний, а на рисунке (b) идеальный граф равномоцных максимальных несвязных паросочетаний.

Лемма 1. $K_{n,m}$ граф является идеальным графом максимальных равномоцных паросочетаний

Доказательство. Рассмотрим любой подграф H графа G . Легко заметить, что любой подграф полного двудольного графа является полным двудольным графом. Обозначим тогда H как K_{n_1, m_1} и не нарушая общности скажем, что $n_1 \geq m_1$. Рассмотрим какое-то максимально паросочетание M . В силу того,

что две вершины любого ребра H принадлежат разным долям и одна вершина может входить максимум в одно ребро из паросочетания, то $|M| \leq m_1$. Если $|M| < m_1$, то значит, что существует вершина из меньшей доли, которая не входит ни в одно ребро M и тем более существует вершина из большей доли, которая также не входит ни в одно ребро M , а так как граф H – полный двудольный, то значит между этими вершинами есть ребро, а значит его можно включить в паросочетание M , что противоречит тому, что M – максимальное паросочетание – ч. т. д.

□

Для формулировки и доказательства основной теоремы этой главы, нам необходимо дать имена следующим графам:

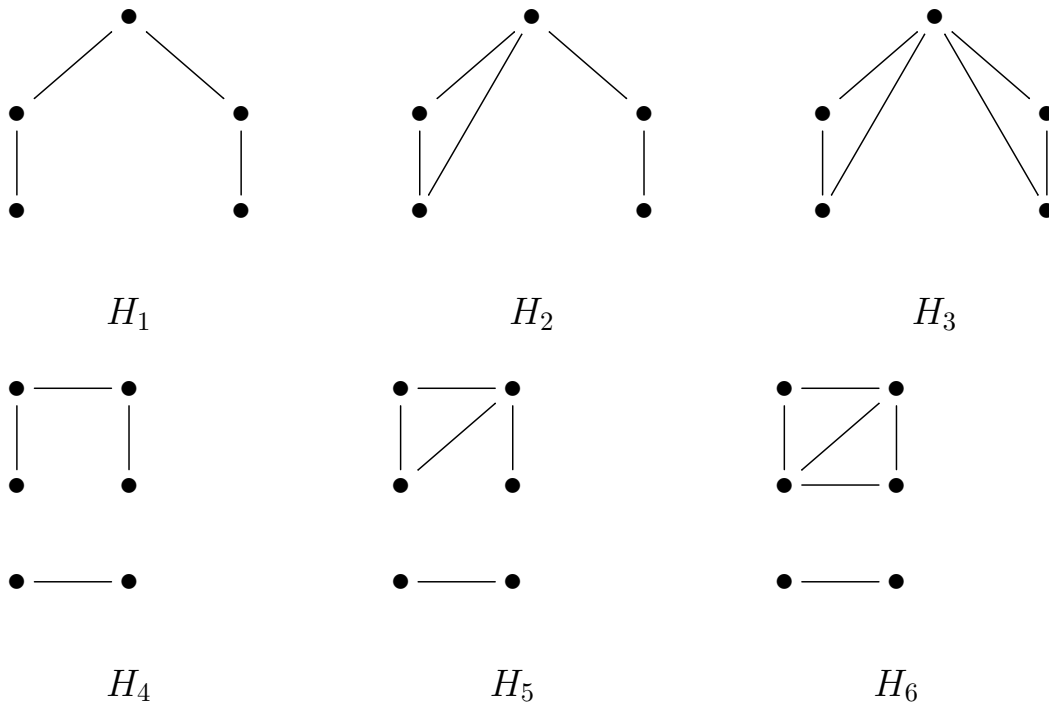


Рисунок 10

Теорема 1. Граф $G \in A_{dc}^*$ тогда и только тогда, когда G является $(H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6)$ -свободным.

Доказательство. 1) Докажем сначала, что $G \in A_{dc}^*$, следовательно G является $(H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6)$ -свободным.

Действительно, пусть это не выполняется, то есть $G \in A_{dc}^*$ и при этом G содержит в качестве своего подграфа один из графов $H_i, i \in \{1, \dots, 6\}$. Пока-

жем, что любой из графов $H_i, i \in \{1, \dots, 6\}$ не является графом равномоцных максимальных несвязных паросочетаний и тогда получим противоречие тому, что один из графов $H_i, i \in \{1, \dots, 6\}$ содержится в G в качестве подграфа.

Для графа H_1 оба паросочетания $M = \{v_1v_2, v_4v_5\}, M_1 = \{v_2v_3\}$ являются несвязными паросочетаниями и даже максимальными в графе H_1 , а так как $|M| \neq |M_1|$, то граф H_1 не является графом равномоцных максимальных несвязных паросочетаний.

Для всех графов $H_i, i \in \{1, \dots, 6\}$ рёбра множеств M, M_1 на рисунках будем обозначать волнистыми рёбрами.

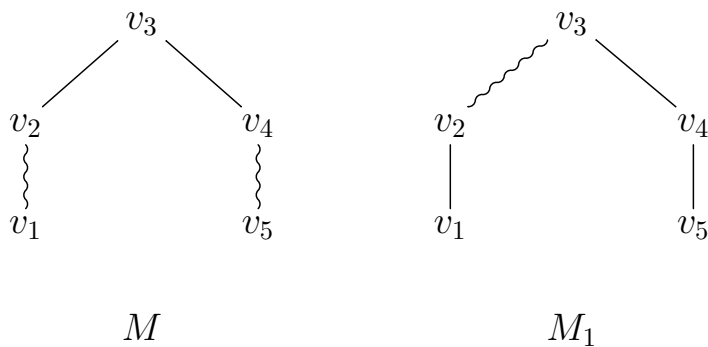
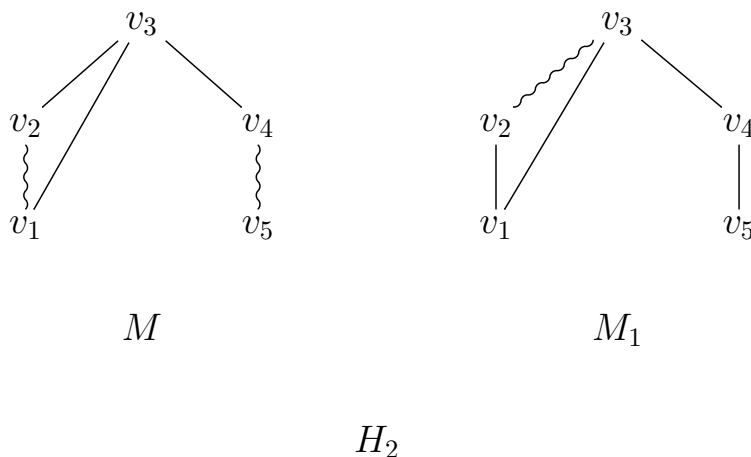
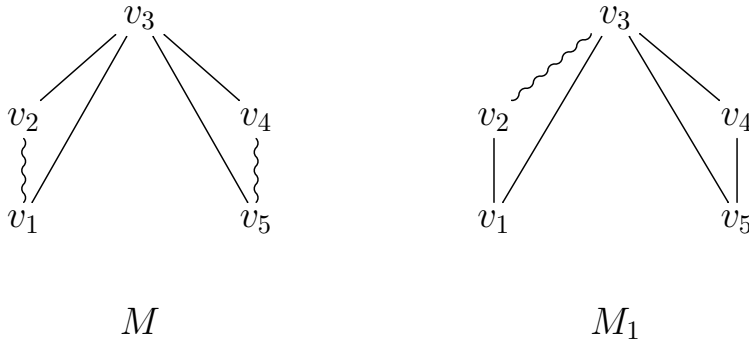


Рисунок 11

Для графов H_2, H_3 мы выберем те же паросочетания $M = \{v_1v_2, v_4v_5\}, M_1 = \{v_2v_3\}$. Легко видеть, что и для графа H_2 , и для графа H_3 оба эти паросочетания являются максимальными несвязными паросочетаниями, а так как $|M| \neq |M_1|$, то ни граф H_2 , ни граф H_3 не являются графами равномоцных максимальных несвязных паросочетаний.

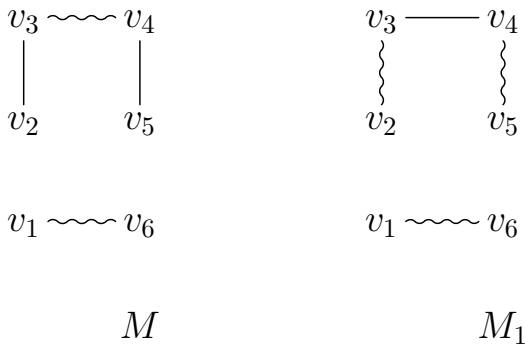




H_3

Рисунок 12

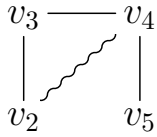
Для графа H_4 обозначим $M = \{v_1v_6, v_3v_4\}$, $M_1 = \{v_1v_6, v_2v_3, v_4v_5\}$. Легко увидеть, что и M и M_1 являются максимальными несвязными паросочетаниями в графе H_4 , однако, так как $|M| \neq |M_1|$ следовательно $H_4 \notin A_{dc}$.



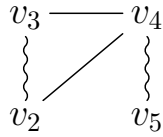
H_4

Рисунок 13

Для графов H_5 , H_6 выберем паросочетания $M = \{v_1v_6, v_2v_4\}$, $M_1 = \{v_1v_6, v_2v_3, v_4v_5\}$. Аналогично случаю с графом H_4 , M и M_1 – максимальные несвязные паросочетания и в графе H_5 и в графе H_6 . $|M| \neq |M_1|$, следовательно ни H_5 , ни H_6 не являются графами равномоощных максимальных несвязных паросочетаний.

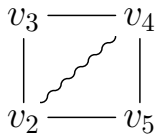


M

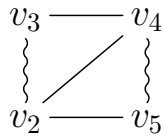


M_1

H_5



M



M_1

H_6

Рисунок 14

2) Теперь докажем, что G является $(H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6)$ -свободным, следовательно $G \in A_{dc}^*$.

Пусть это не так и $G \notin A_{dc}^*$.

Сразу отметим, мы предполагаем, что изолированных вершин нет ни в графе, ни в подграфе (так как изолированная вершина никак не влияет на паросочетание, и так как вместо графа с изолированными вершинами, мы всегда можем рассматривать такой же граф, только без этих вершин).

2.1) Рассмотрим случай, когда G – несвязный граф.

2.1.1) Пусть все компоненты связности – либо полные графы, либо полные двудольные, либо цепь P_3 (Иначе говоря, мы рассматриваем класс граф, где все его компоненты либо полные двудольные графы, либо полные графы порядка больше трёх, либо графы порядка меньше четырёх). Любой подграф полного графа или графа P_3 является полным графом (кроме, конечно собственного подграфа графа P_3). Любой подграф полного двудольного графа есть полный двудольный граф. А значит, про любой подграфа H графа G

можно также сказать, что все его компоненты связности – либо полные двудольные графы, либо полные графы, либо цепь P_3 .

Выберем такой произвольный подграф F графа G . Пусть F_1, \dots, F_k – компоненты связности F . И рассмотрим произвольное максимально несвязное паросочетание M графа F . Если существует какой-то граф F_i , рёбра которого не входят в M , то M – не будет являться максимальным, так как добавка одного ребра из компоненты связности, ребра которой до этого не входили в M , точно не нарушит несвязность паросочетания M . А значит, M не могло быть максимальным несвязным паросочетанием. Значит ребро из каждого графа F_i $i \in \{1, \dots, k\}$ входит в M .

Если F связный, то M может состоять только из одного ребра, так как иначе, если $|M| > 1$, то это бы означало, что в $F[M]$ существует два ребра, расстояние между которыми больше 1, что не возможно, так как $F[M]$ – это либо полный граф, либо полный двудольный, либо цепь P_3 , а во всех этих графах, расстояние между любыми двумя рёбрами либо 0, либо 1.

Если же F – несвязный граф, то, так как максимальное паросочетание M включает как минимум по одному ребру из каждой компоненты связности $F_1, \dots, F_k, k \geq 2$, то несвязность рёбер M будет гарантирована, независимо от того, сколько и какие рёбра входят в M из каждого графа F_i . А значит, любое максимально несвязное паросочетание M состоит из максимальных паросочетаний каждой его компоненты связности. Любое максимальное паросочетание графа P_3 имеет мощность 1, любое максимальное паросочетание графа K_{n_1, n_2} имеет мощность $\min(n_1, n_2)$, а любое максимальное паросочетание полного графа порядка n имеет мощность $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, а значит, M имеет фиксированную мощность. Следовательно, F – граф равномогных максимальных несвязных паросочетаний, а следовательно $G \in A_{dc}$ – противоречие.

2.1.2) Значит в G существует неполная компонента связности F_j порядка больше трёх, которая ещё и не является полным двудольным графом. Так как F_j – неполный граф, то следовательно существуют несмежные друг другу вершины $v, u \in V(F_j)$. Так как граф F_j связный, то существует простая цепь между вершинами v, u . Рассмотрим цепь минимальной длины между вершинами u, v среди всех таких не смежных друг другу вершин u и v в графе F_j и обозначим её P_{vu} . Пусть длина этой цепи больше 2 (длина по рёбрам).

2.1.2.1) Если $|P| = 3$, то выбрав эти 4 ($P = vw_1w_2u$) вершины и 2 любые смежные вершины (w_3, w_4) из любой другой компоненты связности (такие точно существуют из-за нашего предположения несвязности G), мы получим граф изоморфный H_4 или H_5 , или H_6 .

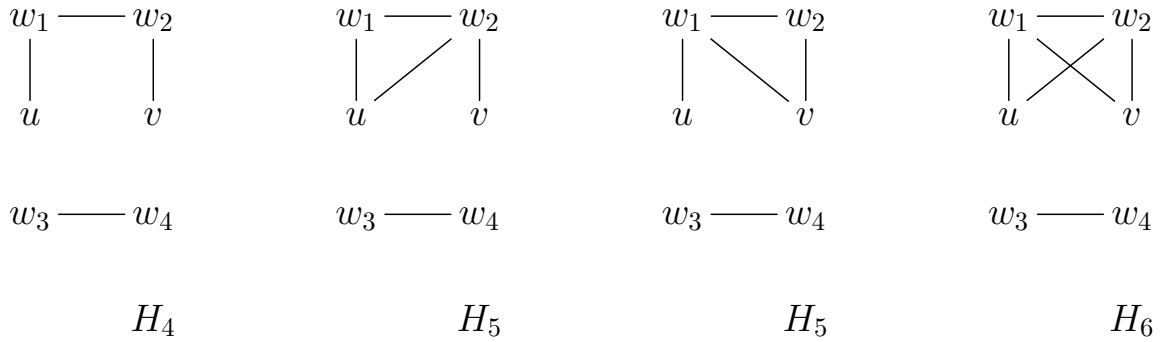


Рисунок 15

2.1.2.2) Если $|P| = 4$, обозначим $(P = vw_1w_2w_3u)$.

Если w_2 и v смежны, то мы получим цепь vw_2w_3u длины 4, что невозможно, так как по нашему предположению цепь P – кратчайшая между вершинами u, v . Аналогично не смежны вершины u и w_2 . Вершины v, w_3 и u, w_1 попарно не смежны, так как иначе будет существовать цепь длины 2 между u, v . А значит, $vw_1w_2w_3u$ – простая цепь P_5 , а граф P_5 изоморфен H_1 – противоречие.

2.1.2.3) Если $|P| \geq 5$ (Обозначим $P = vw_1w_2w_3w_4\dots w_lu$).

Тогда, если v и w_3 не смежны, то выбрав две смежные вершины z_1, z_2 из другой компоненты связности и четыре вершины v, w_1, w_2, w_3 , мы получим случай $|P| = 3$. Если же v и w_3 смежны, то существуют цепь $vw_3w_4\dots w_lu$, длина которой больше трёх, а значит этот случай после нескольких итерации сойдётся либо к случаю $|P| = 3$, либо к случаю $|P| = 4$.

2.1.2.4) Если $|P| = 3$ ($P = vw_1u$).

Так как F_j граф порядка большего 3, то существует как минимум ещё одна вершина, назовём её w_2 .

2.1.2.4.1) w_2 смежна с одной из вершин v, u .

Не нарушая общности скажем, что w_2 смежна с v . Если w_2 не смежна с u , то подграф порождённый вершинами v, w_1, w_2, u, z_1, z_2 (z_1 и z_2 смежные вершины из другой компоненты связности) будет изоморфен одному из графов H_4, H_5, H_6 (Аналогично случаю $|P| = 3$). Получаем, что вершины v, u, w_1, w_2 порождают полный двудольный граф $K_{2,2}$, с долями $A = (v, u)$ и $B = (w_1, w_2)$.

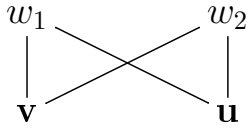


Рисунок 16

Вершины принадлежащие доле A выделены жирным шрифтом на рисунке 16.

Допустим, что граф F_j порядка n . Рассмотрим оставшиеся вершины этого графа w_3, \dots, w_{n-2} . Так как граф F_j – связный, то существует вершина смежная с одной из вершин v, u, w_1, w_2 (Не нарушая общности, пусть это будет вершина w_3).

Если w_3 смежна с одной из вершин доли A (пусть с вершиной v), то если вершина w_3 не смежна с u , то граф порождённый вершинами u, v, w_3, w_2 и двумя смежными друг с другом вершинами z_1, z_2 из другой компоненты связности графа G , будет изоморфен одному из графов H_4, H_5, H_6

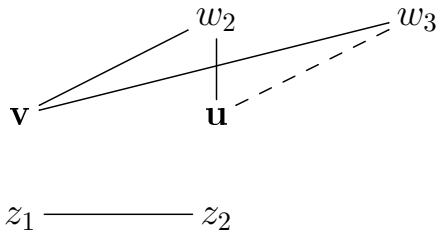


Рисунок 17

Прерывистыми рёбрами отмечен тот факт, что вершины u и w_3 не могут быть смежны.

Получаем, что вершина w_3 в этом случае обязательно смежна с вершиной u . При этом, w_3 не может быть смежна ни с какой из вершин доли B , в противном случае (Пусть например w_3 смежна с w_2) мы получим, что граф порождённый на вершинах z_1, z_2, v, u, w_2, w_3 будет изоморфен графу H_6 . То есть, мы получили, что если w_3 смежна с какой-то вершиной из доли A , то она смежна со всеми вершинами из этой доли, и не смежна ни с одной вершиной из доли B . Аналогично показывается, что если w_3 смежна с какой-то вершиной из доли B , то она смежна со всеми вершинами этой доли и не смежна ни с одной из вершин доли A .

Таким образом, мы получаем, что граф порождённый на вершинах $w_1, w_2,$

w_3, v, u образует уже не $K_{2,2}$, а $K_{2,3}$ граф. Не трудно видеть, что перебирая так все вершины w_k смежные с полными двудольными графами K_{n_1, n_2} , мы будем получать, что граф порождённый уже на новом множестве вершин будет образовывать либо K_{n_1+1, n_2} , либо K_{n_1, n_2+1} . В конечном итоге, мы получим, что граф F_j есть не что иное, как полный двудольный граф K_{n_1, n_2} , где $n_1 + n_2 = |F_j|$ – что является противоречием выбора графа F_j .

2.1.2.4.2) w_2 смежна с w_1 .

Граф порождённый вершинами u, v, w_1 является $K_{1,2}$. Обозначим $B = \{w_1\}$, $A = \{v, u\}$. Если предположить, что w_2 смежна с какой-то вершиной из доли A (не нарушая общности, пусть это будет вершина u), то выбрав две любые смежные друг другу вершины z_1, z_2 из другой доли F_i и четыре вершины u, v, w_1, w_2 , мы получим граф изоморфный одному из графов H_4, H_5, H_6 . Получаем, что вершины u, v, w_1, w_2 порождают $K_{1,3}$. Перебирая дальше вершины смежные с полным двудольным графом (на каждой итерации такие вершины будут существовать, так как F_j – связный граф) мы будем получать либо случай 2.1.2.4.1), где обе доли имеют как минимум по две вершины, либо случай 2.1.2.4.2). Таким образом, в конечном итоге мы опять же получим, что F_j – это K_{n_1, n_2} граф, где $n_1 + n_2 = |F_j|$, что в свою очередь является противоречием.

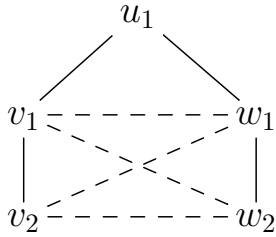
2.2) G – связный граф.

Предположим, что $\forall e_1, e_2 \in E(G)$ выполняется $dist(e_1, e_2) \leq 1$. Другими словами, любые два ребра графа G либо смежны, либо существует другое ребро в G , смежное им обоим. Рассмотрим любой порождённый подграф F (в котором нет изолированных вершин) графа G . Пусть порядок F равен m . Рассмотрим любое максимальное несвязное паросочетание M в графе G . Пусть $|M| \geq 2$, то есть в графе F существуют такие рёбра e_1, e_2 , что $dist(e_1, e_2) > 1$ в F . В графе G , эти два ребра e_1, e_2 либо смежны, либо существует v_1 инцидентная e_1 и v_2 инцидентная e_2 такие, что v_1 и v_2 смежны. И первое и второе свойство должно было сохраниться в порождённом подграфе – противоречие тому, что $|M| > 1$. Следовательно, мощность всех наибольших максимальных несвязных паросочетаний в графе G равна 1, а следовательно $G \in A_{dc}^*$ – противоречие тому, что $\forall e_1, e_2 \in E(G)$ выполняется $dist(e_1, e_2) \leq 1$.

Значит нам осталось рассмотреть один единственный случай, а именно случай когда $\exists e_1, e_2 \in E(G)$ такие, что $dist(e_1, e_2) \geq 2$.

Если порядок графа G равен 4, значит граф G состоит из двух несвязных рёбер, а значит граф G – несвязный граф, что является противоречием. Пусть $e_1 = v_1v_2$, $e_2 = w_1w_2$. Обозначим кратчайшую цепь между этими рёбрами, как $P_{e_1,e_2} = v_1, u_1, \dots, u_k, w_1$, где $k \geq 1$. Среди всех пар рёбер e_1, e_2 , расстояние между которыми больше 1, выберем ту пару рёбер e_1, e_2 , для которой цепь P_{e_1,e_2} минимальна (по количеству вершин) среди всех остальных пар.

2.2.1) Если $k = 1$, то мы получаем следующий граф:



G

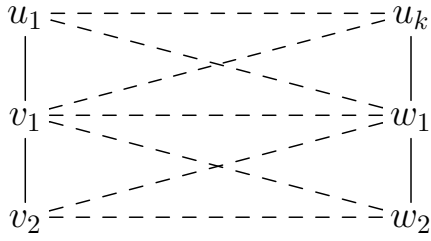
Рисунок 18

Прерывистыми отрезками обозначены несмежные друг другу вершины. Вершины, которые не соединены ни одним ребром, могут либо быть смежными, либо не быть таковыми.

Граф G будет изоморфен тому или иному графу из множества H_1, H_2, H_3 , в зависимости от того, смежна или нет вершина u_1 вершинам v_2, w_2 .

2.2.2) Пусть $k \geq 3$.

Рассмотрим подграф порождённый вершинами $v_2, v_1, w_1, w_2, u_1, u_k$. Вершины u_1 и u_k не смежны, так как мы предположили, что цепь $|P_{e_1,e_2}|$ – кратчайшая цепь, соединяющая рёбра e_1 и e_2 . Аналогично u_1, w_1 не смежны и u_2, v_1 не смежны.



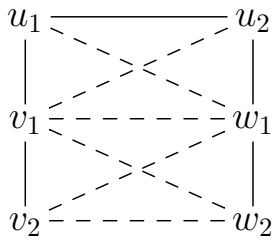
G

Рисунок 19

Таким образом, мы получили, что расстояние между рёбрами u_1v_1 , u_kv_1 больше 1 и, что существует цепь $P_{u_1v_1, u_kv_1} = u_1, u_2, \dots, u_k$ соединяющая эти рёбра, мощность которой строго меньше $|P_{e_1, e_2}|$, что противоречит выбору рёбер e_1 и e_2 .

2.2.3) $k = 2$.

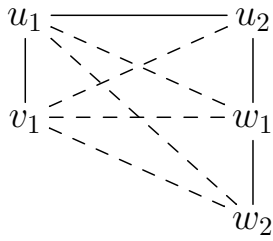
Так как P_{e_1, e_2} – кратчайшая цепь между рёбрами e_1 и e_2 , то вершина u_1 не смежна w_1 . По той же причине вершины u_2 и v_1 не смежны.



G

Рисунок 20

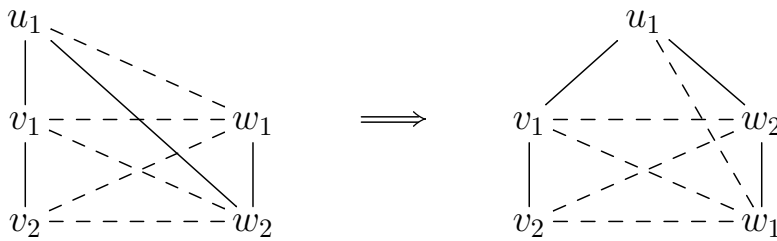
Если вершины u_1 и w_2 не смежны, то граф порождённый вершинами v_1, u_1, u_2, w_1, w_2 изоморфен либо графу H_1 , либо графу H_2 . Это зависит от того, смежны ли вершины u_2 и w_2 .



G

Рисунок 21

То есть u_1 и w_2 смежны. Граф, порождённый вершинами v_2, v_1, u_1, w_2, w_1 изоморфен графу из множества $\{H_1, H_2\}$.



G

Рисунок 22

□

Из второй части доказательства теоремы 1 легко получается следующие следствие.

Следствие 1. Связный граф $G \in A_{dc}^*$ является $2K_2$ -свободным.

Таким образом, мы доказали, что задача поиска наибольшего несвязного паросочетания в классе графов дерева является полиномиально разрешимой. Также получили характеристику класса A_{dc}^* , доказав необходимое и достаточное условие принадлежности графа этому классу.

3 ИНДУЦИРОВАННОЕ ПАРОСОЧЕТАНИЕ

Задача распознавания, связанная с индуцированным паросочением: Пусть дан граф G , верно ли, что $B_*(G) \geq k$?

В этой главе мы установим вычислительную сложность задачи распознавания индуцированного паросочетаия в классе планарных рёберных графов от планарных двудольных, максимальная степень вершин которых не превышает три, а точнее покажем NP -полноту такой задачи.

В статье [1] была доказана NP -полнота задачи распознавания индуцированного паросочетаия в классе планарных рёберных графов от планарных двудольных, максимальная степень вершин которых не превышает четыре. Мы докажем NP -полноту для класса графов, который является подклассом планарных рёберных от планарных двудольных, максимальная степень вершин которых не превышает четыре, тем самым лучшим уже известный результат.

Нам понадобится следующая эталонная задача:

Задача разбиения на изоморфные подграфы: Пусть имеются графы G и H такие, что $|V(G)| = q \cdot |V(H)|$, где q какое-то положительное число. Задача состоит в следующем: существует ли вершинное разбиение $V_1 \cup \dots \cup V_q = V(G)$ такое, что $G(V_i)$ содержит подграф изоморфны H для $i = 1, 2, \dots, q$?

Известно, что эта задача NP -полна, для любого H , в котором существует компонента связности из трёх или более вершин [3, 4, 5].

Также необходимо описать эталонную задачу для следующей теоремы.

Точное покрытие 3-множествами: Пусть $X = \{x_1, \dots, x_{3q}\}$ – множество мощности $3q$, где q натуральное число и $C = \{C_1, \dots, C_m\}$ – множество 3-элементных подмножеств множества X . Существует ли в C точное покрытие \bar{C} множества X , такое что $\bar{C} \in C$ и каждый элемент X принадлежит ровно одному 3-элементному множеству множества \bar{C} ?

Для нашего доказательства мы возьмём $H = P_3$ (простая цепь из трёх вершин). И докажем следующую теорему:

Теорема 1: Задача разбиения на подграфы изоморфные P_3 является NP -полной для планарных двудольных графов, максимальная степень вершин которых не выше трёх.

Доказательство. Известно, что задача точного покрытия 3-множествами является NP -полной. И даже остаётся таковой, если внести дополнительное ограничение, что каждый элемент X входит не более чем в три 3-элементных подмножества C , а граф, в котором вершины являются все элементы x и все элементы C , а ребрами является факт вхождения элемента из X в элемент из C является планарным. Такая задача имеет название планарное точное покрытие 3-множествами[6]. Эту задачу мы и будем как раз использовать в качестве эталлоной.

Каждому элементу множества X мы сопоставим вершину x_i . Каждому 3-элементному подмножеству $C_j = (x_j^1, x_j^2, x_j^3)$ из C . мы сопоставим следующий граф H_j :

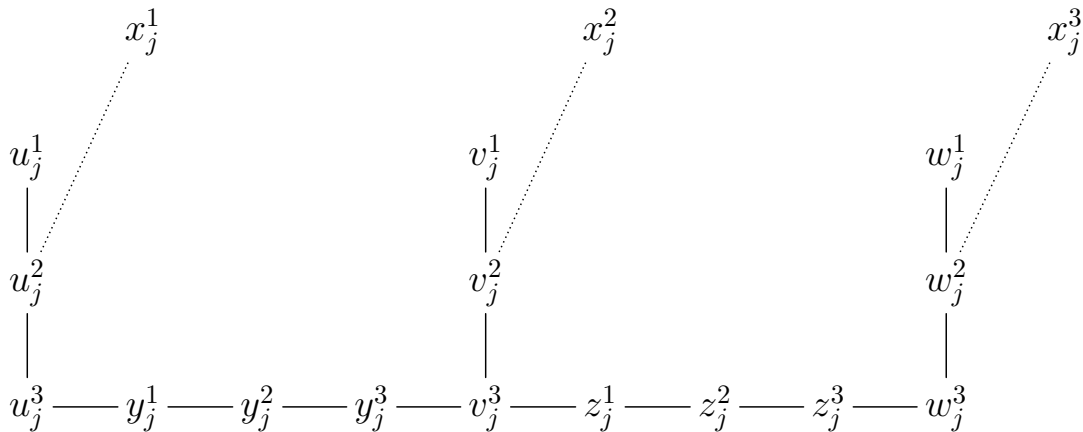


Рисунок 23

Ребра $u_j^2 x_j^1$, $v_j^2 x_j^2$, $w_j^2 x_j^3$ не входят в граф H_j . Эти ребра входят в результирующий граф G тогда и только тогда, когда соответствующая им вершина x_j^k , $k \in 1, 2, 3$ входит в соответствующие 3-элементное подмножество C_j .

Так как в самой эталлоной задаче планарного точного покрытия 3-множествами предполагается, что граф порождённый X и C является планарным, то можем легко заметить, что замена в таком графе вершин $s \in C$ на предоставленный нами выше граф H не нарушит планарности, в силу того, что граф H является достаточно "гибким".

Понятно, что построение графа G выполнется за полиномиальное время.

Так как ни один элемент не входит более чем в три элемента элемента C , то совершенно понятно, что такой граф не имеет вершин степени больше 3. Заметим, что G является двудольным, со следующими долями:

- 1) $V_1 = \{x_i | i \in \{1, \dots, 3q\}\} \cup \{u_j^k, y_j^2, v_j^k, z_j^2, w_j^k | j \in \{1, \dots, m\}; k \in \{1, 3\}\}$
- 2) $V_2 = \{u_j^2, v_j^2, w_j^2, y_j^k, z_j^k : j \in \{1, \dots, m\}; k \in \{1, 3\}\}$

Теперь, пусть существует решение эталлоной задачи.

Тогда в построенном графе G будет следующее разбиение на P_3 цепи для c_j (точнее разбиение соответствующего графа H_j):

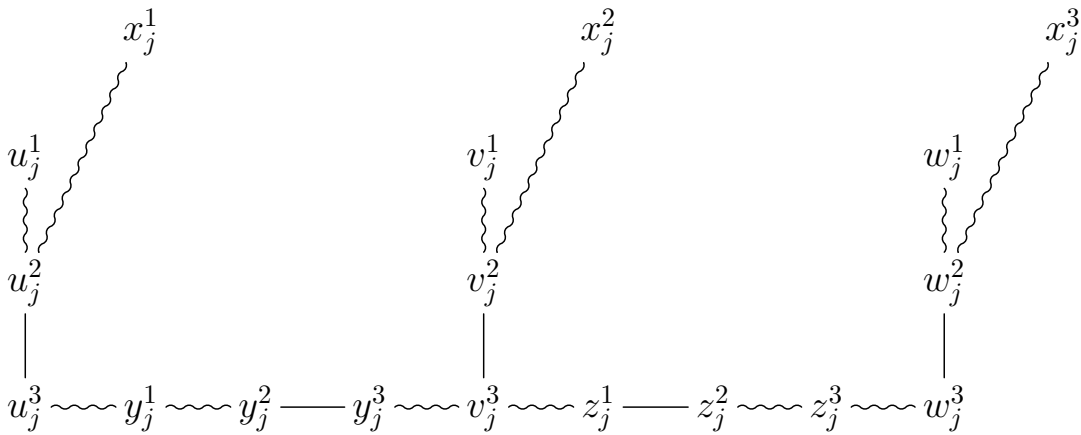


Рисунок 24

И разбиение для графов H_j , которые не входят в \bar{C} .

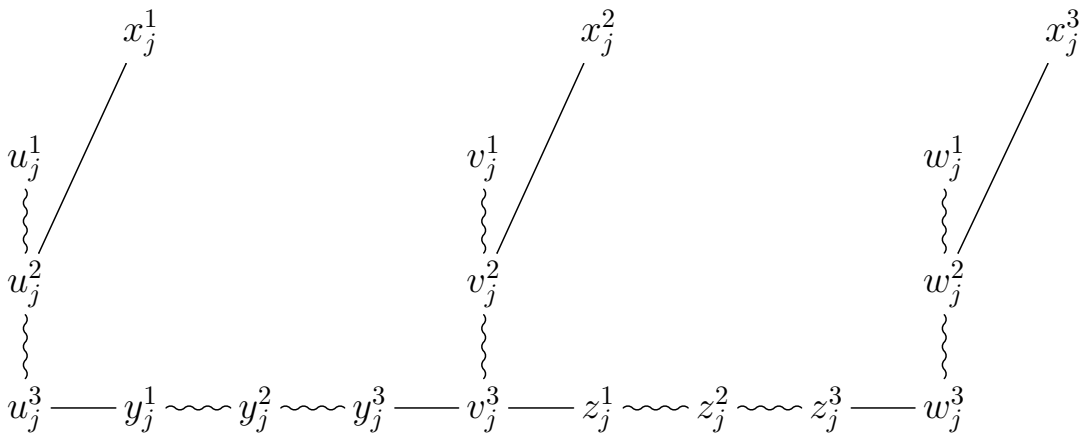


Рисунок 25

Волнистые рёбра принадлежат цепям P_3 .

Пусть теперь существует разбиение графа на цепи P_3 :

Заметим, что $|V(G)| = 3 \cdot q + 15 \cdot m$. И q из задачи разбиения на изоморфные графы равняется $q + 5 \cdot m$. Поэтому, так как $|V(P_3)| \cdot (q + 5 \cdot m) = 3 \cdot q + 15 \cdot m = |V(G)|$, то если и существует решение для задачи о разбиении на изоморфные графы, то все графы $G(V_i)$ изоморфны P_3 (именно сами графы а не их подграфы) и каждая вершина графа G принадлежит той или иной цепи P_3 .

Тогда получаем, что вершины x_i не являются центральными ни в какой цепи P_3 . Действительно, если предположить, что это не так и сказать не нарушая общности, что пусть x_j^1 является центром в цепи p , тогда существует какой-то граф H_j , что $u_j^2 \in p$, а тогда получается, что вершина u_j^1 просто не может быть покрыта никакой цепью – противоречие.

Пусть вершина x_j^1 покрыта концевой вершиной какой-то цепи лежащей в H_j . Тогда этой цепью может быть только цепь (x_j^1, u_j^2, u_j^1) (Иначе у нас останется не покрытая цепью вершина u_j^1). Покрыть вершину u_j^3 может только цепь (u_j^3, y_j^1, y_j^2) . Смотрим дальше и видим, что вершину y_j^3 можно покрыть двумя различными способами, однако случай, когда эта вершина покрывается (y_j^3, v_j^3, v_j^2) – невозможен, так как тогда мы никак не сможем покрыть вершину v_j^1 . Получаем, что вершину y_j^3 покрывает цепь (y_j^3, v_j^3, z_j^1) . Смотрим дальше и видим, что вершину v_j^1 может покрыть только цепь (v_j^1, v_j^2, x_j^2) . Вершину z_j^2 может покрыть только цепь (z_j^2, z_j^3, w_j^3) . А дальше получаем, что вершину w_j^1 может покрыть только цепь (w_j^1, w_j^2, x_j^3) . То есть мы получили, что если вершину x_j^1 покрывает цепь, которая частично покрывает граф H_j , то и оставшиеся две вершины x_j^2 и x_j^3 также должны быть покрыты только цепями, которые покрывают H_j и только H_j .

Пусть теперь x_j^1 покрыта цепью p , которая не пересекается с H_j , тогда вершина u_j^2 может быть покрыта только если есть цепь (u_j^1, u_j^2, u_j^3) . Вершина y_j^1 может быть покрыта только (y_j^1, y_j^2, y_j^3) . Дальше смотрим на вершину v_j^3 и получаем три случая как эта вершина может быть покрыта цепью P_3 :

1) (v_j^2, v_j^3, z_j^1) – этот случай невозможен, так как не остаётся тогда возможности покрыть вершину v_j^1 .

2) (v_j^3, z_j^1, z_j^2) . Тогда вершина z_j^3 может быть покрыта только цепью (z_j^3, w_j^3, w_j^2) . А тогда получаем, что вершина w_j^1 никак не может быть покрыта цепью P_3 – противоречие.

3) Получаем, что возможен один единственный случай, когда вершина v_j^3 покрыта цепью (v_j^3, v_j^2, v_j^1) . Дальше получаем, что возможна только цепь (z_j^1, z_j^2, z_j^3) . А дальше получается, что если вершину w_j^3 покрывает цепь

(w_j^3, w_j^2, x_j^3) , то вершину w_j^1 уже не остаётся способов покрыть. То есть вершину w_j^3 мы можем покрыть только цепью (w_j^3, w_j^2, w_j^1) .

Смотрим на картину в целом и видим, что в случае когда x_j^1 не покрыта цепью, которая также покрывает частично граф H_j , то и для двух других вершин x_j^2, x_j^3 не будет существовать цепей, которые и их покрывают и частично H_j .

Следовательно, можно сделать вывод, что если ребро $x_j^1 u_j^2$ принадлежит какой-то цепи, то и рёбра $x_j^2 v_j^2, x_j^3 w_j^2$ принадлежат каким-то цепям. Если ребро не принадлежит ни одной цепи, то и два других тоже не принадлежат ни одной цепи.

А тогда получается, что можно легко построить решение, взяв в качестве элементов \bar{C} те графы H_j , в которых все три ребра $x_j^1 u_j^2, x_j^2 v_j^2, x_j^3 w_j^2$ принадлежат цепям. Так как все остальные графы H_i не будут иметь цепей, которые покрывают частично и графы H_i и соответствующие им вершины x , то элементы множества \bar{C} не будут пересекаться, и так как по предположению у нас существует разбиение графа G на P_3 цепи, то множество \bar{C} которое мы только что построили будет покрывать все вершины x а значит это и будет решением для эталонной задачи.

□

Теперь можем сформулировать и доказать основную теорему этой главы

Теорема 2. Задача распознавания, связанная с наибольшим индуцированным паросочетанием в классе планарных рёберных графов от планарных двудольных, максимальная степень вершин которых не выше 3 является NP -полной

Доказательство. Пусть G – планарный двудольный граф, максимальная степень вершины в котором не выше 3, а также $|V(G)| = 3 \cdot q$. Известно, что индуцированное паросочетание в рёберном графе $L(H)$ для произвольного графа H соответствует вершино непересекающемуся множеству цепей P_3 в графе G [7], а рёберный граф от планарного двудольного графа максимальная степень вершин которого не превышает 3 является планарным[8](В этой статье доказан даже более сильный результат). Таким образом, так как нами было показано, что задача нахождения разбиения графа G на цепи – NP -полна, то и задача числа наибольшего индуцированного паросочетания – NP -полна.

□

В этой главе мы улучшили (путём сужения класса графов) результат об NP -полноте задачи о наибольшем индуцированном паросчетании.

4 К-ДИСТАНЦИОННЫЕ ПАРСОЧЕТАНИЯ

В этой главе мы введём понятие *k-дистанционное паросочетание* и докажем аналог теоремы принадлежности графа классу $A_2^*[9]$, только уже для *k-дистанционных паросочетаний* (Учитывая тот факт, что 2-дистанционное паросочетание является индуцированным паросочетанием, то мы скорее всего получим не аналог, а обобщение).

Паросочетание M графа G называется *k-дистанционным паросочетанием* ($k \geq 2$), если \forall различных рёбер $v, u \in M$ выполняется: $dist(v, u) \geq k$.

При $k = 2$ мы получим определение индуцированного паросочетания, то есть *k-дистанционное паросочетание* является более общим понятием.

Граф G назовём *графом равноможных максимальных k-дистанционных паросочетаний*, если все максимальные *k-дистанционные паросочетания* этого графа имеют одинаковую мощность, а класс таких графов будем обозначать как A_k .

Граф G назовём *идеальным графом максимальных равноможных k-дистанционных паросочетаний*, если любой порождённый подграф этого графа является графом равноможных максимальных *k-дистанционных паросочетаний*. Такой класс графов будем обозначать как A_k^* .

Примером графа равноможных максимальных *k-дистанционных паросочетаний* может быть полный граф. Так как любой порождённый подграф полного графа является полным графом, то в качестве примера идеального графа равноможных максимальных несвязных паросочетаний может быть представлен также полный граф.

Лемма 1. Пусть G состоит из m компонент связности G_1, \dots, G_m , $M = M_1 \cup \dots \cup M_m$ – *k-дистанционное паросочетание* в G , где M_i – *k-дистанционное паросочетание* в $G_i \forall i \in \{1, \dots, m\}$. M – максимальное *k-дистанционное паросочетание* в G тогда и только тогда, когда M_i – максимальное *k-дистанционное паросочетание* в $G_i \forall i \in \{1, \dots, m\}$.

Доказательство.

Рассмотрим максимальное *k-дистанционное паросочетание* M в G и пусть тогда оно состоит из паросочетаний M_1, \dots, M_m графов G_1, \dots, G_m соответственно. G_i – компоненты связности G , следовательно $dist(M_i, M_j) = \infty, \forall i, j \in \{1, \dots, m\}$, то есть любые два ребра из разных компонент связности удалены друг от друга более чем на $k, \forall k \in \mathbb{N}$.

То есть, если M_i не максимальное k -дистанционное паросочетание в G_i , то расширив M_i до максимального k -дистанционного M_i^1 , мы получим, что новое паросочетание $M_{new} = M_1 \cup \dots \cup M_i^1 \cup \dots \cup M_m$ является k -дистанционным паросочетанием, при этом $|M_{new}| > |M|$ и $M \in M_{new}$, что противоречит тому, что M – максимальное k -дистанционное паросочетание.

В другую сторону, если M_1, \dots, M_m – максимальные k -дистанционные паросочетания в G_1, \dots, G_m соответственно, и при этом $M = M_1 \cup \dots \cup M_m$ не является максимальным k -дистанционным паросочетанием в G . Тогда рассмотрим k -дистанционное паросочетание $M^1 = M_1^1 \cup \dots \cup M_m^1$: $M \in M^1$, $|M| < |M^1|$ и M^1 – максимальное k -дистанционное паросочетание в G (Очевидно, что такое паросочетание существует). Тогда можем заметить, что существует i : $|M_i^1| > |M_i|$. Так как $M \in M^1$, то $M_i \in M_i^1$, а это противоречие тому, что M_i – максимальное k -дистанционное паросочетание в G_i . □

Лемма 2. Пусть G состоит из m компонент связности G_1, \dots, G_m . G является графом равноможных максимальных k -дистанционных паросочетаний тогда и только тогда, когда G_i является графом равноможных максимальных k -дистанционных паросочетаний $\forall i \in \{1, \dots, m\}$.

Доказательство.

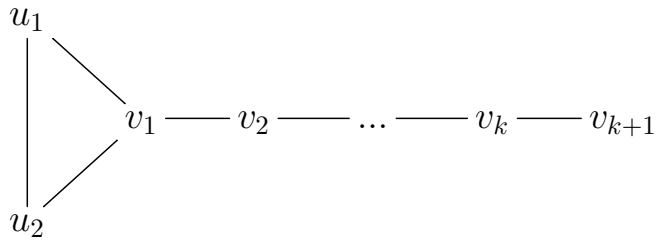
1) Пусть $G \in A_k^*$ и пусть при этом $\exists i: G_i \notin A_k^*$. Тогда существуют k -дистанционные паросочетания в G_i M_i^1, M_i^2 : $|M_i^1| \neq |M_i^2|$. Тогда по Лемме 1 получается, что существуют максимальные k -дистанционные паросочетания M^1, M^2 в G : $M_i^1 \in M^1$, $M_i^2 \in M^2$ и $|M^1| \neq |M^2|$ – противоречие тому, что $G \in A_k^*$.

2) Пусть $G_i \in A_k^*$, $\forall i \in \{1, \dots, m\}$. Тогда из Леммы 1 совершенно очевидно, что все максимальные k -дистанционные паросочетания в G являются равноможными. □

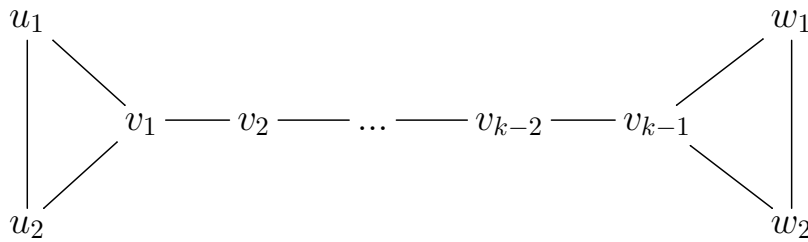
Обозначим следующие графы:

$$v_1 \text{ --- } v_2 \text{ --- } v_3 \text{ --- } \dots \text{ --- } v_{k+1} \text{ --- } v_{k+2} \text{ --- } v_{k+3}$$

H_1



H_2



H_3

Рисунок 26

Теорема 2. Граф $G \in A_k^*$ тогда и только тогда, когда G является (H_1, H_2, H_3) -свободным.

Доказательство. Докажем сначала в одну сторону:

$G \in A_k^*$, следовательно G является (H_1, H_2, H_3) -свободным.

Пусть это не так, и $G \in A_k^*$ и при этом H_k является подграфом графа G , $k \in \{1, 2, 3\}$. Рассмотрим этот подграф H_k и докажем, что он не является графом равномошных максимальных k -дистанционных паросочетаний.

Рассмотрим три случая:

1) $k = 1$

рассмотрим два множества рёбер: $B = \{v_1v_2, v_{k+2}v_{k+3}\}, C = \{v_2v_3\}$. На следующем рисунке элементы этих множеств отмечены волнистым рёбрами.

$$v_1 \rightsquigarrow v_2 \text{ --- } v_3 \text{ --- } \dots \text{ --- } v_{k+1} \text{ --- } v_{k+2} \rightsquigarrow v_{k+3}$$

B

$$v_1 \text{ --- } v_2 \rightsquigarrow v_3 \text{ --- } \dots \text{ --- } v_{k+1} \text{ --- } v_{k+2} \text{ --- } v_{k+3}$$

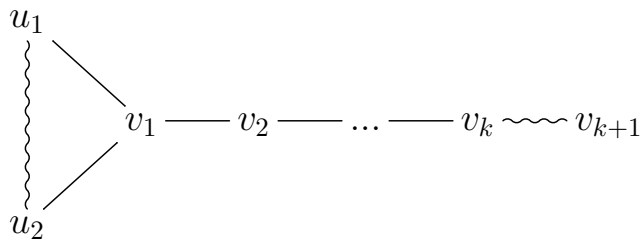
C

Рисунок 27

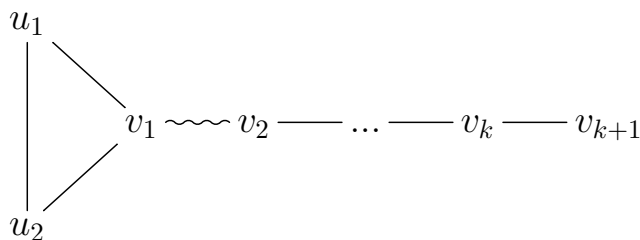
Расстояние между рёбрами v_1v_2 , $v_{k+2}v_{k+3}$ равно k , следовательно B – k -дистанционное паросочетание, а так как совершенно очевидно, что добавить к этим рёбрам ещё одно так, чтобы паросочетание осталось k -дистанционным нельзя, следовательно B – максимальное паросочетание. Также можно заметить, что C тоже является максимальным k -дистанционным паросочетанием. Так как $|B| \neq |C|$, получаем, что граф H_1 не может являться подграфом графа G .

2) $k = 2$

Обозначим $B = \{u_1u_2, v_kv_{k+1}\}$, $C = \{v_1v_2\}$.



B



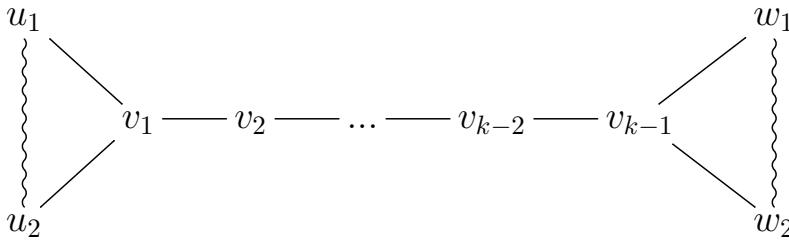
C

Рисунок 28

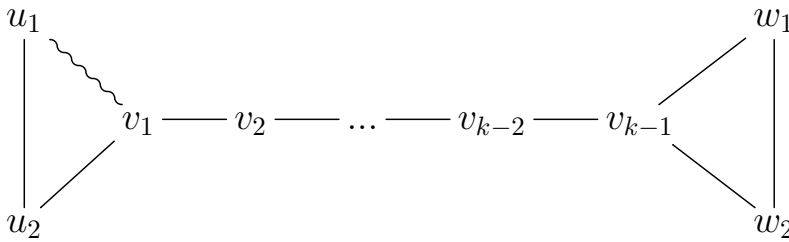
$dist(u_1u_2, v_kv_{k+1}) = k$, следовательно B – k -дистанционное паросочетание, и также очевидно, что оно максимальное k -дистанционное паросочетание. Также легко заметить, что C является максимальным k -дистанционным паросочетанием, а так как $|B| \neq |C|$, следовательно H_2 не может быть подграфом графа G .

3) $k = 3$

Обозначим $B = \{u_1u_2, w_1w_2\}$, $C = \{u_1v_1\}$.



B



C

Рисунок 29

$dist(u_1u_2, w_1w_2) = k$, следовательно B – k -дистанционное паросочетание и совершенно очевидно, что оно максимальное k -дистанционное паросочетание. C также является максимальным k -дистанционным паросочетанием, а так как $|B| \neq |C|$, следовательно H_3 не является подграфом графа G .

Получаем, что G – (H_1, H_2, H_3) -свободный – ч.т.д.

Докажем теперь: G является (H_1, H_2, H_3) -свободным, следовательно $G \in A_k^*$.

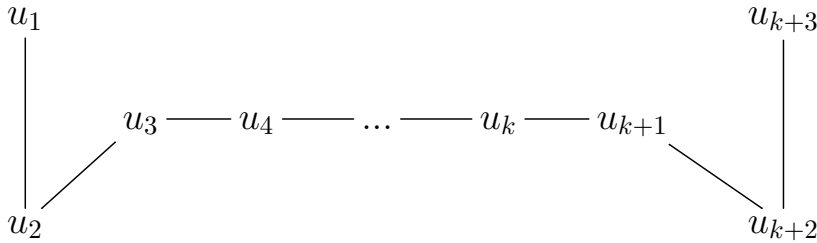
Пусть G состоит из m компонент связности, обозначим их как G_1, \dots, G_m . Так как все H_i – связные графы, то G_i – (H_1, H_2, H_3) -свободные $\forall i \in$

$\{1, \dots, m\}$. Если мы докажем, что $G_i \in A_k^*$, $\forall i \in \{1, \dots, m\}$ то по Лемме 2 мы получим, что и $G \in A_k^*$.

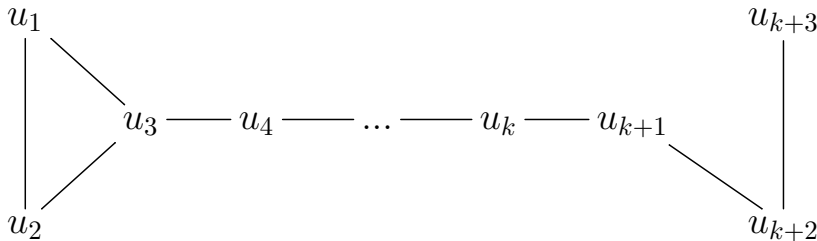
Рассматриваем граф G_i . Предположим противное, что $G_i \notin A_k^*$, тогда \exists k -дистанционное паросочетание M_i в G_i : $|M_i| \geq 2$. То есть в G_i существуют рёбра e_1, e_2 такие, что $dist(e_1, e_2) \geq k$, а значит существует ребро e_3 такое, что $dist(e_1, e_3) = k$.

Обозначим $e_1 = v_1v_2, e_3 = v_{k+2}v_{k+3}$, и $v_2v_3\dots v_{k+1}v_{k+2} = C$ – кратчайший путь между рёбрами e_1, e_2 . Вершины v_1, v_2 не могут быть смежны с вершинами $v_i, \forall i \in \{4, \dots, k+3\}$, так как иначе мы получим, что $dist(e_1, e_3) < k$. Аналогично получаем, что v_{k+2}, v_{k+3} не могут быть смежны с вершинами $v_i, \forall i \in \{1, \dots, k\}$. Такими же рассуждениями получаем, что v_3 не может быть смежна с вершинами $v_i, \forall i \in \{5, \dots, k+3\}$ и вершина v_{k+1} не смежна с $v_i, \forall i \in \{1, k-1\}$.

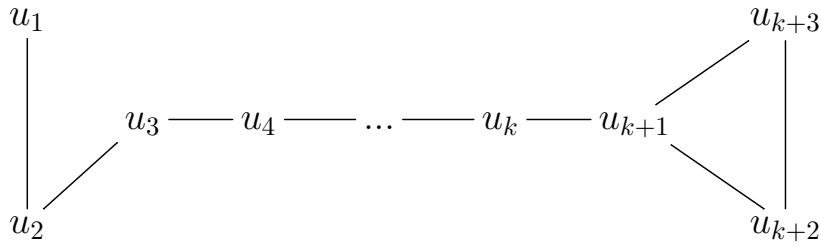
Аналогично получаем, что все остальные вершины $v_j, \forall j \in \{4, k\}$ не смежны ни с одной другой вершиной из множества вершин $\{v_i | i \in \{1, \dots, k+3\}\}$, кроме двух своих соседних вершин в цепи C . Иначе говоря, в графе порождённом на множестве вершин $\{v_i | i \in \{1, \dots, k+3\}\}$, кроме рёбер, которые уже входят в цепь $v_1v_2\dots v_{k+2}v_{k+3}$ могут присутствовать только рёбра $v_1v_3, v_{k+3}v_{k+1}$. Рассмотрев все 4 возможных варианта, мы получим, что граф порождённый на вершинах $\{v_i | i \in \{1, k+3\}\}$ будет либо H_1 , либо H_2 , либо H_3 .



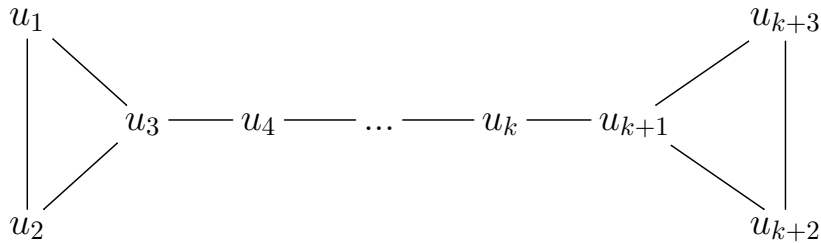
H_1



H_2



H_2



H_3

Рисунок 30

- ч. т. д.

□

Следствие. Теорема 2 является обобщением теоремы о характеристизации класса для индуцированных паросочетаний (Теорема 5 из главы 1).

Доказательство. Если в Теореме 5 взять k равное 2, то получится, что $H_1^1 = H_1$, $H_2^1 = H_2$ и $H_3^1 = H_3$. А k -дистанционное паросочетание станет индуцированным.

□

В этой главе мы привели характеристизацию класса идеальных графов равномогущих максимальных k -дистанционных паросочетаний. Доказали её корректность и показали, что данный результат является обобщением характеристизации для класса B_* .

5 ВЗВЕШЕННОЕ ИНДУЦИРОВАННОЕ ПАРСОЧЕТАНИЕ

В этой главе под взвешенным графом мы будем подразумевать граф, каждой вершине которого предписаны числовые параметры (веса). Под весом ребра мы будем подразумевать сумму весов его вершин.

Задача поиска наибольшего по весу индуцированного паросочетания заключается в поиске такого индуцированного паросочетания M , что сумма весов вершин этого паросочетания максимальна.

Операция *подстановки* графа G_1 вместо вершины $v \in V(G)$ в граф G состоит из следующих действий:

- 1) Удаление вершины v из графа G
- 2) Объединение графов G_1 и $G \setminus \{v\}$.
- 3) Добавление ребра между любой вершиной графа G_1 и любой вершиной $N(v)$.

Пример подстановки G_1 вместо вершины v в граф G . Результатом является граф G_2 .

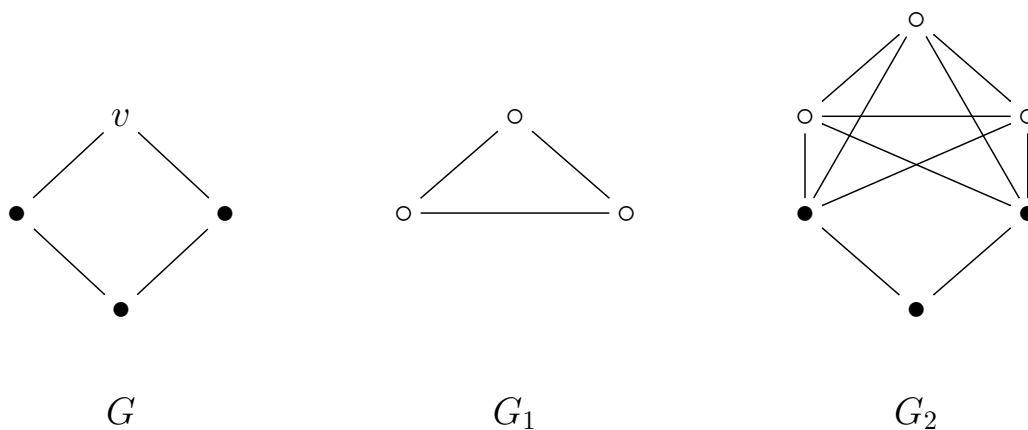


Рисунок 31

Пусть P это какой-то класс графов, тогда P^1 – класс графов, в который входит сам класс P и графы полученные одной операцией подстановки графа из класса P вместо любой вершины класса графа P . P^* – класс графов, в который входит сам класс P и графы, полученные путём последовательного выполнения операций подстановки.

Теорема 1. Пусть P – класс графов, в котором задача о наибольшем

взвешенном индуцированном паросочетании разрешима за полиномиальное время, G_1 и G_2 – произвольные графы из класса P и вершина $v \in V(G_1)$. Тогда для графа, который получается из G_1 в результате подстановки вместо вершины v графа G_2 , задача о наибольшем взвешенном индуцированном паросочетании также разрешима за полиномиальное время.

Доказательство. Пусть A – алгоритм, который решает задачу о нахождении наибольшего взвешенного индуцированного паросочетания за полиномиальное время.

Рассмотрим взвешенный граф G_2 , который получился путём подстановки взвешенного графа G_1 из класса P вместо вершины v взвешенного графа G из того же класса P .

Подграф порождённый вершинами $N(v)$ будем обозначать как H . Множество рёбер, одна вершина которых принадлежит графу G_1 , а вторая H будем обозначать как $E_{connect}$. Вес предписанный вершине v во взвешенном графе G будем обозначать как $c(v)_G$.

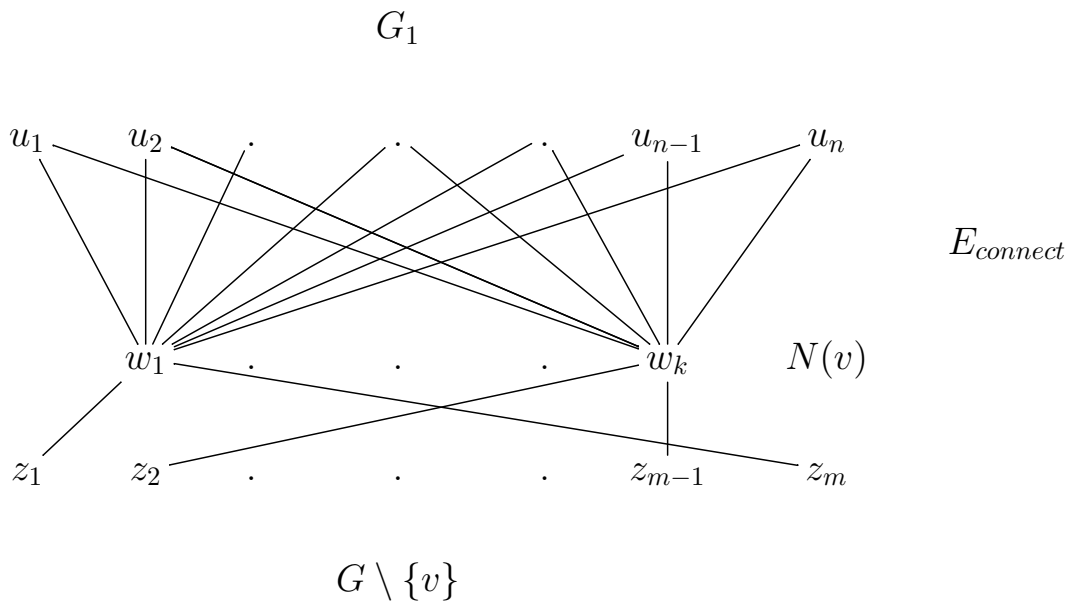


Рисунок 32

Пусть M – наибольшее взвешенное паросочетание графа G_2 .

1) Если хотя бы одно ребро (назовём его h_1h_2) графа H входит в M , то тогда в M не может быть ни одного ребра из графа G_1 , так как $dist(h_1h_2, e) \leq 1, \forall e \in E(G_1)$. Рассмотрим произвольное ребро $h_3v \in E_{connect}$, где $v \in V(G_1)$. Так как v и h_1 смежны, то $dist(h_1h_2, h_3v) = 1$ ($dist(h_1h_2, h_3v) = 0$, если $h_3 \in \{h_1, h_2\}$), следовательно любое ребро $E_{connect}$ также не принадлежит

индуцированному паросочетанию M . Получаем, что все рёбра $M \in E(G \setminus \{v\})$.

Пусть в графе G каждая вершина u имеет вес $c(u)_G$. Рассмотрим взвешенный граф G_w :

$$\begin{aligned} V(G) &= V(G_w), \\ E(G) &= E(G_w), \\ c(u)_{G_w} &= c(u)_G, \forall u \in V(G_w \setminus \{v\}), \\ c(v)_{G_w} &= -\max(\{c(u)_G \mid \forall u \in N(v)\}) - 1. \end{aligned}$$

Очевидно, что построение данного графа G_w занимает полиномиальное время. Алгоритм A находит наибольшее взвешенное индуцированное паросочетание в графе G_w , при этом, так как вес любого ребра инцидентного вершине v отрицателен, то данный алгоритм получит наибольшее взвешенное индуцированное паросочетание в графе $G \setminus \{v\}$.

2) Если хотя бы одно ребро $e = hu \in M$, где $h \in V(H)$ и $u \in G \setminus \{v\}$, то аналогичными рассуждениями пункту 1), мы получим, что ни одно ребро из множества $E_{connect}$ и ни одно ребро из графа G_1 также не входит в M . А также получим, что наибольшее взвешенное паросочетание во всём графе совпадает с наибольшим взвешенным паросочетанием в построенном графе G_w из пункта 1), которое можно найти алгоритмом A за полиномиальное время.

3) Если какое-то ребро hu_1 из множества $E_{connect}$ входит в M , где $h \in V(H)$, то оно единственное, так как любые два ребра в множестве $E_{connect}$ либо смежны, либо имеют ребро, которое смежно им обоим. Никакое ребро графа G_1 также не входит в M , так как любая вершина G_1 смежна с вершиной h . Получаем, что M – наибольшее взвешенное паросочетание в графе, порождённом вершинами $\{u_1, G \setminus \{v\}\}$, а этот граф есть не что иное, как G с точностью до весов вершин.

Пусть u_{max} – вершина с максимальным весом в G_1 . Обозначим граф, порождённый вершинами $\{u_1, G \setminus \{v\}\}$ как G_{u_1} и граф, порождённый вершинами $\{u_{max}, G \setminus \{v\}\}$, как $G_{u_{max}}$. Структурно, эти графы полностью совпадают с графом G , и все рёбра не инцидентные вершине u_1 в G_{u_1} , и рёбра не инцидентные вершине v_1 в G_{v_1} имеют одинаковые веса. Однако все рёбра инцидентные u_1 имеют меньшие веса, чем все рёбра инцидентные вершине u_{max} .

Таким образом, чтобы найти наибольшее взвешенное индуцированное паросочетание в этом случае, нужно найти вершину с максимальным весом в графе G_1 (если таких вершин несколько, то можно выбрать любую), постро-

ить граф $G_{u_{max}}$, который очевидным образом строится за полиномиальное время и воспользоваться алгоритмом A для этого графа.

4) Получаем, что остался случай, когда ни одно ребро инцидентное $N(v)$ не входит в M . Так как $dist(G_1, G \setminus N(v)) = 2$, то M – это объединение наибольшего взвешенного индуцированного паросочетания в G_1 и наибольшего взвешенного индуцированного паросочетания в $G \setminus N(v)$. Алгоритм A способен найти наибольшее взвешенное индуцированное паросочетание в графе G_1 . Чтобы найти наибольшее взвешенное индуцированное паросочетание в $G \setminus N(v)$, мы воспользуемся приёмом из пункта 1). А именно, мы возьмём граф G и поменяем веса в вершинах $\{v, N(v)\}$ на $\{-max(c(u)) - 1 | \forall u \in V(G \setminus N(v))\}$, тем самым мы гарантируем, что алгоритм A не выберет рёбра с отрицательным весом. А значит, алгоритм A для нового построенного графа найдёт наибольшее взвешенное индуцированное паросочетание в графе $G \setminus N(v)$.

В итоге, чтобы получить наибольшее взвешенное индуцированное паросочетание в G_2 , нам надо найти наибольшее взвешенное индуцированное паросочетание в каждом из четырёх пунктов, и выбрать из них паросочетание с наибольшим весом – ч.т.д.

□

Доказана теорема о наибольшем взвешенном индуцированном паросочетании в графе, который получен из других графов в результате применения к ним некоторой графовой операции подстановки.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Был разработан полиномиальный алгоритм для задачи нахождения мощности наибольшего несвязного паросочетания и самого несвязного наибольшего паросочетания в классе деревьев. Установлена NP -полнота задачи наибольшего индуцированного паросочетания в классе планарных рёберных графов от планарных двудольных, максимальная степень вершин которых не превышает три. Для k -дистанционных и несвязных паросочетаний сформулированы и доказаны необходимые и достаточные условия принадлежности графа к классу идеальных графов максимальных паросочетаний. Доказана теорема о наибольшем взвешенном индуцированном паросочетании в графе, который получен из других графов в результате применения к ним некоторой графовой операции подстановки.

Список литературы

- [1] Yury Orlovich, Gerd Finke, Valery Gordon, Igor Zverovich, *Approximability results for the maximum and minimum maximal induced matching problems*, 5 (2008) 584–593
- [2] Wayne Goddard, Sandra M. Hedetniemi, Stephen T. Hedetniemi, Renu Laskar, *Generalized subgraph-restricted matchings in graphs*, 293 (2005) 129 – 138
- [3] D.G. Kirkpatrick, P. Hell, *On the complexity of a generalized matching problem*, New York, 1978, pp. 240–245
- [4] D.G. Kirkpatrick, P. Hell, *On the complexity of general graph factor problems*, Comput. 12 (1983) 601–609
- [5] M.R. Garey, D.S. Johnson, *Computers and Intractability. A Guide to the Theory of NP-completeness* W.H. Freeman and Co., San Francisco, CA, 1979
- [6] M.E. Dyer, A.M. Frieze, *Planar 3DM is NP-complete*, J. Algorithms 7 (1986) 174–184
- [7] D. Kobler, U. Rotics, *Finding maximum induced matchings in subclasses of claw-free and P_5 -free graphs, and in graphs with matching and induced matching of equal maximum size*, Algorithmica 37 (2003) 327–346
- [8] J. Sedla'cek, *Some properties of interchange graphs*, in: *Theory of Graphs and its Applications*, Academic Press, New York, 1964, pp. 145–150
- [9] Philippe Baptiste, Mikhail Y. Kovalyov, Yury L. Orlovich, Frank Werner, Igor E. Zverovich *Graphs with maximal induced matchings of the same size*, Discrete Applied Mathematics 216(2017), 15-28
- [10] K. Cameron, *Induced matchings*, Discrete Appl. Math. 24 (1–3) (1989) 97–102
- [11] C.W. Ko, F.B. Shepherd, *Adding an identity to a totally unimodular matrix*, Working paper LSEOR 94.14, 1994.
- [12] | L.J. Stockmeyer, V.V. Vazirani, *NP-completeness of some generalizations of the maximum matching problem*, Inform. Process. Lett. 15 (1) (1982) 14–19.
- [13] J. Edmonds, *Paths, trees, and flowers*, Canad. J. Math. 17 (1965) 449–467.