УДК 515.12

О СЧЕТНОКОМПАКТИФИЦИРУЕМОСТИ В СМЫСЛЕ МОРИТА

Г. О. КУКРАК[1]***, В. Л. ТИМОХОВИЧ***[1]

[1]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*

Рассматривается расширение Y топологического пространства X, которое канонически вкладывается в волмэновское расширение ωX, при этом в нем замкнуто любое счетно-компактное замкнутое в X множество и имеет предельную точку любое лежащее в X бесконечное множество. Такое расширение названо насыщением пространства X. Находится необходимое и достаточное условие счетнокомпактности пространства Y. Тем самым решается проблема существования счетнокомпактификации в смысле Морита определенного типа.

Ключевые слова: счетнокомпактификация в смысле Морита; компактификация Волмэна; насыщение топологического пространства.

ON THE COUNTABLY-COMPACTIFIABILITY IN THE SENSE OF MORITA

H. O. KUKRAK[a]***, V. L. TIMOKHOVICH***[a]

[a]*Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*

Corresponding author: H. O. Kukrak (kukrak@bsu.by)

We consider an extension Y of a topological space X that is canonically embedded in the Wallman extension ωX, in which any countably compact set closed in X is closed and such that any infinite set contained in X has a limit point in it.

Образец цитирования:
Кукрак ГО, Тимохович ВЛ. О счетнокомпактифицируемости в смысле Морита. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2021;1:46–53.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2021-1-46-53

For citation:
Kukrak HO, Timokhovich VL. On the countably-compactifiability in the sense of Morita. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2021;1:46–53. Russian.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2021-1-46-53

Авторы:
Глеб Олегович Кукрак – кандидат физико-математических наук; доцент кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики механико-математического факультета.
Владимир Леонидович Тимохович – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики механико-математического факультета.

Authors:
Hleb O. Kukrak, PhD (physics and mathematics); associate professor at the department of geometry, topology and mathematics teaching methodology, faculty of mechanics and mathematics.
kukrak@bsu.by
Vladimir L. Timokhovich, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of geometry, topology and mathematics teaching methodology, faculty of mechanics and mathematics.
timvlaleo@gmail.com

This extension is called saturation of the space *X*. We find a necessary and sufficient condition for the countable compactness of the space *Y*. Thus the problem of existence of countably-compactification in the sense of Morita of certain type is solved.

Keywords: countably-compactification in the sense of Morita; Wallman compactification; saturation of topological space.

Введение

Понятия перистого паракомпакта (А. В. Архангельский [1]) и М-пространства (К. Морита [2]) появились почти одновременно. Сразу же обращает на себя внимание схожесть их внешних характеристик. В классе хаусдорфовых пространств перистые паракомпакты и только они допускают метризуемый образ при совершенном отображении. И аналогично, М-пространства и только они допускают метризуемый образ при квазисовершенном отображении. Когда перистые паракомпакты были охарактеризованы как замкнутые подпространства произведений метризуемых пространств на компакты (Дж. Нагата [3]), возник вопрос о возможности аналогичной характеристики М-пространств. Вскоре было доказано (К. Морита [4]), что представимость М-пространства X в виде замкнутого подпространства произведения метризуемого пространства на вполне регулярное счетно-компактное (аналог полученной в [3] характеристики перистого паракомпакта) равносильна его счетнокомпактифицируемости, т. е. существованию для X вполне регулярного счетно-компактного расширения, в котором замкнуто любое замкнутое в X счетно-компактное множество. Как оказалось, даже не все нормальные локально компактные М-пространства счетно-компактифицируемы [5]. Но и при наличии полученных контрпримеров задача нахождения необходимых и достаточных условий счетнокомпактифицируемости (не обязательно М-пространства) представляет определенный интерес (см., например, [6–8]).

В предлагаемой работе для произвольного T_1-пространства X строится расширение, в котором X относительно счетно-компактно (т. е. любое лежащее в X бесконечное множество имеет в этом расширении предельную точку) и в котором замкнуто любое счетно-компактное замкнутое в X множество (в [7] такое расширение названо насыщением). Для этого расширения (в случае регулярности пространства X) находится необходимое и достаточное условие его счетнокомпактности (см. теорему 5). В классе вполне регулярных δ-хаусдорфовых пространств (см. определение 5) это позволяет решить вопрос о существовании счетнокомпактификации определенного типа (см. теорему 7), что отчасти дополняет работу [6]. В плане использования в качестве отправной точки некоторых построений волмэновского расширения ωX настоящая статья примыкает к работам [7; 8].

Кратко об обозначениях. Под пространством понимаем произвольное топологическое T_1-пространство (если иное не оговорено). Пусть X – пространство, $A \subset X$, α – семейство некоторых множеств в X. Обозначим $[A]_X$ и $|A|$ замыкание и мощность множества A соответственно; $St_\alpha(A) = \cup\{U \in \alpha | U \cap A \neq \varnothing\}$; $ST_\alpha(A) = \{U \in \alpha | U \cap A \neq \varnothing\}$; $\mathrm{Cov}(X)$ – семейство всех открытых покрытий пространства X; $C(X, I)$ – множество всех непрерывных отображений пространства X в отрезок $I = [0; 1]$; $\mathbb{N}$ – натуральный ряд. Будем использовать запись вида $A \underset{op}{\subset} X$ $(A \underset{cl}{\subset} X)$, если A открыто (замкнуто соответственно) в X; $A \underset{dense}{\subset} X$, если $[A]_X = X$; $A \underset{\omega - dense}{\subset} X$, если для любой точки $x \in X$ найдется не более чем счетное множество $B \subset A$ такое, что $x \in [B]_X$. Наконец, множество A назовем дискретом в X, если A счетно, дискретно (как подпространство) и замкнуто в X.

Предварительные рассмотрения

Пусть X и Y – произвольные пространства и $X \subset Y$ (т. е. X – подпространство в Y).

Определение 1 [9]. Пространство Y называют звезднокомпактным (X-звезднокомпактным), если для любого покрытия $\alpha \in \mathrm{Cov}(Y)$ найдется конечное множество $A \subset Y$ ($A \subset X$ соответственно) такое, что $ST_\alpha(A) \in \mathrm{Cov}(Y)$ (т. е. $St_\alpha(A) = Y$).

Понятия звезднокомпактности и счетнокомпактности тесно связаны.

Теорема 1 [9]. *Если пространство Y счетно-компактно, то оно и звезднокомпактно.*

Теорема 2 [10]. *Если пространство Y является хаусдорфовым и звезднокомпактным, то оно и счетно-компактно.*

Теорему 1 можно дополнить следующим образом.

Теорема 3. *Пусть $X \underset{\omega - dense}{\subset} Y$. Тогда если Y счетно-компактно, то оно и X-звезднокомпактно.*

Доказательство. Допустим от противного, что существует покрытие $\alpha \in \mathrm{Cov}(Y)$ такое, что $St_\alpha(A) \neq Y$ для любого конечного $A \subset X$. Покажем, что тогда $St_\alpha(A) \neq Y$ и для любого счетного $A = \{a_n | n \in \mathbb{N}\} \subset X$. Действительно, так как $St_\alpha(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} St_\alpha(\{a_1, \ldots, a_n\})$, то из равенства $St_\alpha(A) = Y$ и счетнокомпактности пространства Y следовало бы, что $St_\alpha(\{a_1, \ldots, a_n\}) = Y$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, что противоречит допущению. Выберем далее множество $B = \{y_1, \ldots, y_n\} \subset Y$ так, чтобы $St_\alpha(B) = Y$ (см. теорему 1). Согласно условию для каждой точки y_i подберем не более чем счетное множество $K_i \subset X$ такое, что $y_i \in [K_i]_Y$, и обозначим $A = \bigcup_{i=1}^{n} K_i$. Поскольку $St_\alpha(A) = St_\alpha([A]_Y)$ и $St_\alpha([A]_Y) \supset St_\alpha(B)$, то $St_\alpha(A) = Y$. Но $A \subset X$ и A не более чем счетно. Получили противоречие. Теорема доказана.

Следующая теорема, в некотором смысле обратная к теореме 3, вытекает очевидным образом из теоремы 2.

Теорема 4. *Пусть пространство Y хаусдорфово. Если Y X-звезднокомпактно, то оно и счетнокомпактно.*

Введем некоторые дополнительные обозначения. Для произвольных $U \underset{op}{\subset} X$ и $\alpha \in \mathrm{Cov}(X)$ обозначим $\hat{U} = \cup\left\{G \underset{op}{\subset} Y | G \cap X = U\right\}$ (т. е. $\hat{U}$ – максимальное открытое раздутие U в Y, или, другими словами, $\hat{U} = Y \setminus [X \setminus U]_Y$), $\hat{\alpha} = \{\hat{U} | U \in \alpha\}$ и далее $\mathrm{COV}_Y(X) = \left\{\alpha \in \mathrm{Cov}(X) \middle| \hat{\alpha} \in \mathrm{Cov}(Y)\right\}$.

Следующие предложения 1 и 2 очевидны.

Предложение 1. *Если пространство Y X-звезднокомпактно, то для любого покрытия* $\alpha \in \mathrm{COV}_Y(X)$ *можно выбрать конечное множество* $A \subset X$, *для которого* $ST_\alpha(A) \in \mathrm{COV}_Y(X)$.

Предложение 2. *Пусть* $X \underset{dense}{\subset} Y$, *множества вида* $\hat{U}$, *где* $U \underset{op}{\subset} X$, *составляют базу топологии в пространстве Y, а для любого покрытия* $\alpha \in \mathrm{COV}_Y(X)$ *можно выбрать конечное множество* $A \subset X$ *так, что* $ST_\alpha(A) \in \mathrm{COV}_Y(X)$. *Тогда пространство Y X-звезднокомпактно.*

Непосредственно из теорем 3, 4 и предложений 1, 2 вытекает приведенное ниже следствие.

Следствие 1. *Пусть* $X \underset{\omega-dense}{\subset} Y$, *Y хаусдорфово и множества вида* $\hat{U}$, *где* $U \underset{op}{\subset} X$, *составляют базу топологии в Y. Пространство Y тогда и только тогда счетно-компактно, когда для любого покрытия* $\alpha \in \mathrm{COV}_Y(X)$ *можно выбрать конечное множество* $A \subset X$ *таким образом, что* $ST_\alpha(A) \in \mathrm{COV}_Y(X)$.

Насыщение и его счетнокомпактность

Рассматриваем те же пространства X и Y, $X \subset Y$.

Определение 2 [11]. Скажем, что пространство X относительно счетно-компактно в Y, если любое бесконечное множество $A \subset X$ имеет в Y предельную точку.

Определение 3 [7]. Пространство Y назовем насыщением пространства X, если $X \underset{dense}{\subset} Y$, X относительно счетно-компактно в Y и любое счетно-компактное замкнутое в X множество замкнуто и в Y.

Отметим, что если Y – насыщение для X и $A \underset{cl}{\subset} X$, то $[A]_Y$ – насыщение для A.

Рассмотрим далее волмэновское компактное расширение ωX пространства X. Напомним, что нарост $X^* = \omega X \setminus X$ составляют замкнутые (т. е. состоящие из замкнутых в X множеств) свободные (т. е. имеющие пустое пересечение) ультрафильтры и базу топологии в ωX образуют множества вида $W(U) = U \cup \left\{\xi \in X^* | U \supset F \text{ для некоторого } F \in \xi\right\}$, где $U \underset{op}{\subset} X$ (подробнее см. [12, с. 272]). Отметим, что $W(U) = \cup\left\{G \underset{op}{\subset} \omega X | G \cap X = U\right\}$, и если $F \underset{cl}{\subset} X$ и $F \subset U \underset{op}{\subset} X$, то $[F]_{\omega X} = F \cup \left\{\xi \in X^* | F \in \xi\right\}$ и $[F]_{\omega X} \subset W(U)$. Также отметим выполнение соотношений $W(U_1 \cup \ldots \cup U_n) = W(U_1) \cup \ldots \cup W(U_n)$ и $[F_1 \cap \ldots \cap F_n]_{\omega X} = [F_1]_{\omega X} \cap \ldots \cap [F_n]_{\omega X}$, где $U_i \underset{op}{\subset} X$, $F_i \underset{cl}{\subset} X$, $1 \leq i \leq n$ (см. там же). И наконец, для $F \underset{cl}{\subset} X$ обозначим $F^* = [F]_{\omega X} \setminus F = \left\{\xi \in X^* | F \in \xi\right\}$.

Далее через Δ обозначим семейство всех дискретов в X, т. е. счетных дискретных (как подпространство) замкнутых в X множеств. Подсемейство $\beta \subset \Delta$ назовем Δ-базой (семейства Δ), если для любого $A \in \Delta$ можно выбрать $B \in \beta$ такое, что $B \subset A$. Зафиксируем некоторую Δ-базу β и положим $Y_\beta = X \cup$

$\cup\left\{\xi\in X^*\middle|\xi\cap\beta\neq\varnothing\right\}$. Ясно, что $X\subset Y_\beta\subset\omega X$, $Y_\beta = X\cup\left(\cup\left\{A^*\middle|A\in\beta\right\}\right)$ и $W(U)\cap Y_\beta=\hat{U}$ для любого $U\underset{op}{\subset}X$ (здесь, как и выше, $\hat{U}=\cup\left\{G\underset{op}{\subset}Y_\beta\middle|G\cap X=U\right\}$). Отметим также, что если β_1 и β_2 – Δ-базы и $\beta_1\subset\beta_2$, то $Y_{\beta_1}\subset Y_{\beta_2}\subset Y_\Delta$.

Предложение 3. *Пространство Y_β – насыщение для пространства X, причем выполняются условия:*

1) $X\underset{\omega-dense}{\subset}Y_\beta$;

2) множества $\hat{U}$, где $U\underset{op}{\subset}X$, образуют базу топологии в Y_β;

3) если $A\in\beta$, то $[A]_{Y_\beta}=[A]_{\omega X}$ и $[A]_{Y_\beta}$ компактно;

4) если $F\underset{cl}{\subset}X$ и $F\subset U\underset{op}{\subset}X$, то $[F]_{Y_\beta}\subset\hat{U}$;

5) если $U=U_1\cup\ldots\cup U_n$, то $\hat{U}=\hat{U}_1\cup\ldots\cup\hat{U}_n$, если $F=F_1\cap\ldots\cap F_n$, то $[F]_{Y_\beta}=[F_1]_{Y_\beta}\cap\ldots\cap[F_n]_{Y_\beta}$, где $U_i\underset{op}{\subset}X$, $F_i\underset{cl}{\subset}X$, $1\le i\le n$;

6) если X регулярно, то Y_β хаусдорфово.

Доказательство следует непосредственно из построения. Остановимся кратко лишь на п. 6. Достаточно рассмотреть ультрафильтры $\xi,\ \psi\in Y_\beta\setminus X$, $\xi\neq\psi$. Свойства ультрафильтров (см. [12, с. 271]) позволяют выбрать дизъюнктные множества $F_1\in\xi$ и $F_2\in\psi$. Пусть $A\in\xi\cap\beta$ и $B\in\psi\cap\beta$. Обозначим $A'=A\cap F_1$, $B'=B\cap F_2$. Очевидно, что A' и B' дизъюнктны, $A'\in\xi$, $B'\in\psi$ и $A'\cup B'\in\Delta$. Если пространство X регулярно, то любой дискрет из Δ (в частности, $A'\cup B'$) можно раздуть до дизъюнктного семейства окрестностей его точек. Таким образом, для A' и B' найдутся дизъюнктные окрестности U и V, $A'\subset U\underset{op}{\subset}X$ и $B'\subset V\underset{op}{\subset}X$. Имеем далее $\xi\in[A']_{Y_\beta}\subset\hat{U}$, $\psi\in[B']_{Y_\beta}\subset\hat{V}$ (см. п. 4) и $\hat{U}\cap\hat{V}=\varnothing$. Предложение доказано.

Перейдем к вопросу о счетнокомпактности насыщения Y_β.

Определение 4. Покрытие $\alpha\in\mathrm{Cov}(X)$ назовем β-крупным, если любой дискрет $A\in\beta$ покрывается конечным числом элементов α. Семейство всех β-крупных покрытий обозначим $B\mathrm{Cov}_\beta(X)$.

Лемма. *Покрытие $\alpha\in\mathrm{Cov}(X)$ является β-крупным тогда и только тогда, когда $\alpha\in\mathrm{COV}_{Y_\beta}(X)$ (т. е. $B\mathrm{Cov}_\beta(X)=\mathrm{COV}_{Y_\beta}(X)$).*

Доказательство. Сначала докажем *необходимость*. Пусть $\alpha\in B\mathrm{Cov}_\beta(X)$ и $\xi\in Y_\beta\setminus X$. Выберем дискрет $A\in\xi\cap\beta$, затем множества $U_1,\ \ldots,\ U_n\in\alpha$, покрывающие A. Имеем $A\subset U$, где $U=U_1\cup\ldots\cup U_n$, откуда $\xi\in[A]_{Y_\beta}\subset\hat{U}$ (см. предложение 3, п. 4). Но $\hat{U}=\hat{U}_1\cup\ldots\cup\hat{U}_n$ (см. предложение 3, п. 5), а следовательно, $\xi\in\hat{U}_i$ для некоторого i, $1\le i\le n$. Итак, $\alpha\in\mathrm{COV}_{Y_\beta}(X)$.

Докажем *достаточность*. Пусть $\alpha\in\mathrm{COV}_{Y_\beta}(X)$ и $A\in\beta$. Поскольку множество $[A]_{Y_\beta}$ компактно (см. предложение 3, п. 3), то можно выбрать множества $U_1,\ \ldots,\ U_n\in\alpha$ такие, что $\hat{U}_1\cup\ldots\cup\hat{U}_n\supset[A]_{Y_\beta}$. Но тогда $U_1\cup\ldots\cup U_n\supset A$. Таким образом, $\alpha\in B\mathrm{Cov}_\beta(X)$. Лемма доказана.

Из следствия 1, предложения 3 и леммы вытекает приведенная ниже теорема.

Теорема 5. *Пусть пространство X регулярно. Насыщение Y_β счетно-компактно тогда и только тогда, когда для любого покрытия $\alpha\in B\mathrm{Cov}_\beta(X)$ можно выбрать конечное множество $A\subset X$ так, что $ST_\alpha(A)\in B\mathrm{Cov}_\beta(X)$.*

Остановимся более подробно на отделимости пространства Y_β.

Определение 5 [13]. Пространство X называют δ-хаусдорфовым, если оно хаусдорфово и из любого множества $A\in\Delta$ можно выделить бесконечное подмножество $B\subset A$, допускающее раздутие до дискретного семейства $\left\{U_b\middle|b\in B\right\}$, где $b\in U_b\underset{op}{\subset}X$, $b\in B$.

Напомним некоторые схожие определения. В [14] пространство X названо хорошо отделимым (*well separated*), если любое множество $A\in\Delta$ допускает раздутие до локально конечного семейства $\left\{U_a\middle|a\in A\right\}$, где $a\in U_a\underset{op}{\subset}X$, $a\in A$. Чуть позже в [6] появилось определение свойства *ss*-дискретности (*ss-discrete property*), а именно: пространство X имеет это свойство, если из любого множества $A\in\Delta$ можно выбрать бесконечное подмножество $B\subset A$, допускающее раздутие до локально конечного семейства $\left\{U_b\middle|b\in B\right\}$, где $b\in U_b\underset{op}{\subset}X$, $b\in B$. Очевидно, что все хорошо отделимые, а также все δ-хаусдорфовы пространства обладают свойством *ss*-дискретности. В [6] приведен пример вполне регулярного пространства со свойством *ss*-дискретности, которое не является хорошо отделимым. Несложно проверить, что в классе регулярных пространств свойства *ss*-дискретности и δ-хаусдорфовости равносильны.

Через δ обозначим семейство всех дискретов $A \in \Delta$, допускающих раздутие до дискретного семейства окрестностей своих точек, Δ-базу β назовем δ-базой, если $\beta \subset \delta$. Отметим, что если пространство X δ-хаусдорфово, то из любой Δ-базы можно выбрать δ-базу и само семейство δ является одной из Δ-баз. И обратно, если X хаусдорфово и хотя бы одна Δ-база является δ-базой, то X δ-хаусдорфово.

Следующее предложение дополняет п. 6 из предложения 3.

Предложение 4. *Если насыщение Y_β регулярно (для некоторой Δ-базы β), то X δ-хаусдорфово и $\beta \subset \delta$ (т. е. β является δ-базой). Обратно, если X регулярно и δ-хаусдорфово, то Y_β регулярно для любой δ-базы β.*

Доказательство фактически содержится в [15, лемма 2, теорема 5].

Предложение 5. *Пусть X вполне регулярно и δ-хаусдорфово. Тогда и Y_β вполне регулярно для любой δ-базы β.*

Доказательство. Ограничимся рассмотрением точки $\xi \in Y_\beta \backslash X$. Пусть $\xi \in \hat{U}$, где $U \underset{op}{\subset} X$. Покажем, что существует функция $\varphi \in C(Y_\beta, I)$ такая, что $\varphi(\xi) = 1$ и $\varphi(y) = 0$ при $y \in Y_\beta \backslash \hat{U}$. В силу устройства Y_β можно выбрать дискрет $A \in \xi \cap \delta$ такой, что $A \subset U$. Раздуем A до дискретного семейства окрестностей U_a, $a \in U_a \underset{op}{\subset} X$, $a \in A$. Можно считать, что $U_a \subset U$ для всех $a \in A$. Далее для каждой точки $a \in A$ зафиксируем функцию $f_a \in C(X, I)$, $f_a(a) = 1$, $f_a(x) = 0$ при $x \in X \backslash U_a$, и положим $f(x) = \max\{f_a(x) | a \in A\}$. Легко проверить, что $f \in C(X, I)$, $f(A) = \{1\}$ и $f(x) = 0$ при $x \in X \backslash U$. Функция f однозначно продолжается до функции $F \in C(\omega X, I)$ (см. [12, с. 272]), для которой имеем $F(\xi) \in F([A]_{\omega X}) = \{1\}$, $F(z) = 0$ при $z \in \omega X \backslash W(U)$. Осталось положить $\varphi = F|_{Y_\beta}$. Предложение доказано.

ω-Насыщение пространства X

Возвращаемся к пространствам X и Y, $X \subset Y$.

Определение 6. Пусть β – Δ-база и выполняются условия:

а) для любой точки $z \in Y \backslash X$ найдется дискрет $A \in \beta$ такой, что $z \in [A]_Y$, и обратно, $[A]_Y \cap (Y \setminus X) \neq \varnothing$ для любого $A \in \beta$;

б) если $B \subset A \in \beta$ и $B \subset U \underset{op}{\subset} X$, то $[B]_Y \subset \hat{U}$ (или, другими словами, если $A \in \beta$ и $F \underset{cl}{\subset} X$, то $[F]_Y \cap$ $\cap [A \backslash F]_Y = \varnothing$);

в) множества вида $\hat{U}$, где $U \underset{op}{\subset} X$, образуют базу топологии пространства Y.

Тогда пространство Y назовем ω-насыщением (или насыщением типа ω) для пространства X, а Δ-базу β – ω-допустимой для Y. Если Y является ω-насыщением и для некоторой ω-допустимой Δ-базы β компактны все множества $[A]_Y$, где $A \in \beta$, то Y назовем Ω-насыщением (или насыщением типа Ω) для X, а Δ-базу β – Ω-допустимой.

Замечание. Любое ω-насыщение является насыщением. Действительно, в силу условия *а* пространство X относительно счетно-компактно в Y, а в силу условия *б* любое замкнутое в X счетно-компактное множество замкнуто и в Y. Отметим также, что при регулярности пространства Y условие *в* выполняется автоматически.

Очевидно, что все рассмотренные в предыдущем разделе насыщения вида Y_β являются Ω-насыщениями и любая Δ-база β Ω-допустима для Y_β. Докажем, что в определенном смысле верно и обратное. Для этого зафиксируем произвольное ω-насыщение Y (для X), ω-допустимую (для Y) Δ-базу β и определим каноническое (т. е. тождественное на X) вложение $j : Y \to \omega X$ (т. е. $Y \to j(Y)$ – гомеоморфизм) следующим образом. Положим $j(x) = x$ при $x \in X$. Для $z \in Y \setminus X$ зафиксируем $A \in \beta$ такое, что $z \in [A]_Y$, и рассмотрим множество $\kappa(z, A) = \cap\left\{[A \cap O]_{\omega X} \middle| z \in O \underset{op}{\subset} Y\right\}$. Ясно, что $\varnothing \neq \kappa(z, A) \subset X^*$. Пусть $\xi \in \kappa(z, A)$. Допустим, что $\xi' \in \kappa(z, A)$ и $\xi' \neq \xi$. Выберем $F \in \xi$ и $F' \in \xi'$ так, чтобы $F \cap F' = \varnothing$ (свойства ультрафильтров см. в [12, с. 271]). Поскольку $F \cap A \cap O \neq \varnothing$ и $F' \cap A \cap\cap O \neq \varnothing$ для любой окрестности O точки z, то $z \in [F \cap A]_Y$ и $z \in [F' \cap A]_Y$, что невозможно (см. условие *б* в определении 6). Таким образом, $\kappa(z, A) = \{\xi\}$. Если $z \in [B]_Y$, где $B \in \beta$, и $\kappa(z, B) = \{\xi'\}$, то, рассуждая аналогичным образом, получаем $\xi = \xi'$. Итак, множество $\kappa(z, A)$ одноточечно и не зависит от выбора A. Полагаем $j(z) = \xi$. Отображение $j : Y \to \omega X$ определено. Проверим инъективность. Пусть $z, z' \in Y \backslash X$, $z \neq z'$,

$z \in [A]_Y$, $z' \in [B]_Y$, где $A, B \in \beta$, $j(z) = \xi$, $j(z') = \xi'$, и допустим, что $\xi = \xi'$. Но тогда, как несложно заметить, $z \in [A \cap B \cap O \cap O']_Y$ и $z' \in [A \cap B \cap O \cap O']_Y$ для любых окрестностей O точки z и O' точки z'. Выберем окрестность $\hat{U}$ точки z, где $U \underset{op}{\subset} X$, так, чтобы $z' \notin \hat{U}$ (см. условие *в* в определении 6), и обозначим $C = A \cap U$. Имеем $z' \in [C]_Y$ (см. выше). С другой стороны, $C \subset U$, а следовательно, $[C]_Y \subset \hat{U}$ (см. условие *б* в определении 6), что противоречит соотношению $z' \notin \hat{U}$. Инъективность проверена. Для доказательства непрерывности j и $j^{-1} : j(Y) \to Y$ достаточно показать, что если $z \in Y \setminus X$ и $j(z) = \xi$, то соотношения $z \in \hat{U}$ и $\xi \in W(U)$ равносильны для произвольного $U \underset{op}{\subset} X$. Зафиксируем дискрет $A \in \beta$, для которого $z \in [A]_Y$. Пусть $\xi \in W(U)$. Тогда $F \cap A \cap O \subset U$ для некоторых $F \in \xi$ и окрестности O точки z, а следовательно, $z \in [F \cap A \cap O]_Y \subset \hat{U}$. И обратно, пусть $z \in \hat{U}$. Тогда $\hat{U} \cap A = U \cap A \in \xi$, откуда $\xi \in W(U)$. Итак, отображение $j : Y \to j(Y)$ – гомеоморфизм, причем, как легко заметить, $j(Y) \subset Y_\beta$. Если же Y – Ω-насыщение и Δ-база β Ω-допустима, то $j(Y) = Y_\beta$, поскольку $j([A]_Y) = [A]_{\omega X}$ при $A \in \beta$, что вытекает из непрерывности j и того факта, что $[F]_{\omega X}$ и ωF канонически гомеоморфны для любого $F \underset{cl}{\subset} X$ [11, с. 70]. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 6. *Для любого* ω*-насыщения* Y *пространства* X *с* ω*-допустимой* Δ*-базой* β *существует каноническое вложение пространства* Y *в* Y_β*, причем если* Y *–* Ω*-насыщение, а* Δ*-база* β Ω*-допустима, то* Y *и* Y_β *канонически гомеоморфны.*

Учитывая предложение 4, получаем приведенное ниже следствие.

Следствие 2. *Любое пространство, допускающее регулярное насыщение типа* Ω*, является* δ*-хаусдорфовым.*

Счетнокомпактификация типа Ω

По-прежнему рассматриваем пространства X и Y, $X \subset Y$. Напомним следующее определение.

Определение 7 [4]. Пространство Y называют счетнокомпактификацией пространства X, если $X \underset{dense}{\subset} Y$, Y вполне регулярно и счетно-компактно и любое счетно-компактное замкнутое в X множество замкнуто в Y.

Проведенные нами рассмотрения служат достаточной мотивацией выделения в отдельный тип счетнокомпактификаций, являющихся Ω-насыщениями.

Определение 8. Пространство Y назовем счетнокомпактификацией типа Ω для пространства X, если Y – вполне регулярное счетно-компактное Ω-насыщение пространства X.

Отметим, что если описанное в определении 8 пространство Y существует, то в силу теоремы 6 и предложения 4 можно считать, что $Y = Y_\beta$, где β – некоторая Δ-база, пространство X δ-хаусдорфово и β является δ-базой. С другой стороны, если X вполне регулярно и δ-хаусдорфово, а β – δ-база, то Y_β вполне регулярно (см. предложение 5).

Итак, вопрос о существовании счетнокомпактификации типа Ω свелся к вопросу о счетнокомпактности Y_β, где β – некоторая δ-база, а пространство X вполне регулярно и δ-хаусдорфово. Теорема 5 позволяет сформулировать следующий результат.

Теорема 7. *Пусть пространство* X *вполне регулярно и* δ*-хаусдорфово. Пространство* X *допускает счетнокомпактификацию типа* Ω *тогда и только тогда, когда для некоторой* δ*-базы* β *выполняется условие: для любого покрытия* $\alpha \in B\mathrm{Cov}_\beta(X)$ *существует конечное множество* $A \subset X$ *такое, что* $ST_\alpha(A) \in B\mathrm{Cov}_\beta(X)$.

В завершение приведем сравнительно простой, но достаточно интересный пример, использующий стоун-чеховскую (она же волмэновская) компактификацию натурального ряда $\mathbb{N}$.

Пример. Положим $X = \mathbb{N}$. Зафиксируем некоторый ультрафильтр $\xi_0 \in \mathbb{N}^*$ и рассмотрим Δ-базы $\beta = \Delta \setminus \xi_0$ (здесь ξ_0 понимается как семейство множеств в $\mathbb{N}$) и Δ, а также соответствующие Ω-насыщения $Y_\beta = \omega\mathbb{N} \setminus \{\xi_0\}$ и $Y_\Delta = \omega\mathbb{N}$. Имеем: Y_Δ компактно, в то время как Y_β счетно-компактно, но не компактно (см. [12, с. 309]). Далее зафиксируем счетные множества $S_i \subset \mathbb{N}$ такие, что $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i = \mathbb{N}$ и $S_i \cap S_j = \varnothing$ при $i \neq j$, и обозначим $\gamma_0 = \{A \in \Delta \mid A \subset S_i$ для некоторого $i \in \mathbb{N}\}$, $\gamma_1 = \{A \in \Delta \mid |A \cap S_i| \le 1$ для любого $i \in \mathbb{N}\}$, $\gamma = \gamma_0 \cup \gamma_1$, $K_0 = \{\xi \in \mathbb{N}^* \mid \xi \cap \gamma_0 \neq \varnothing\}$ и $K_1 = \{\xi \in \mathbb{N}^* \mid \xi \cap \gamma_1 \neq \varnothing\}$. Простая проверка показывает, что

$\gamma - \Delta$-база, $K_0 \cap K_1 = \varnothing$ и $Y_\gamma = \mathbb{N} \cup K_0 \cup K_1$. Докажем, что Ω-насыщение Y_γ не счетно-компактно. Для каждого $i \in \mathbb{N}$ зафиксируем ультрафильтр $\xi_i \in S_i^*$. Множество $D = \{\xi_i | i \in \mathbb{N}\}$ замкнуто в $\mathbb{N} \cup K_0$ и дискретно. Пусть $\xi \in K_1$ и $A \in \xi \cap \gamma_1$. Рассмотрим окрестность $W(A)$ ультрафильтра ξ. Допустим, что $\xi_i \in W(A)$. Но тогда $A \in \xi_i$ и в то же время $S_i \in \xi_i$, откуда $A \cap S_i \in \xi_i$, что невозможно, поскольку $|A \cap S_i| \leq 1$. Таким образом, D бесконечно и не имеет в Y_γ предельной точки, откуда следует, что Y_γ не счетно-компактно. Итак, уже при $X = \mathbb{N}$ для Ω-насыщения реализуются три возможности: быть компактификацией, являться не компактной счетнокомпактификацией типа Ω, не быть счетно-компактным. И наконец, построим для $\mathbb{N}$ счетно-компактное ω-насыщение Y, которое не является Ω-насыщением. Для каждого дискрета $A \in \Delta$ зафиксируем некоторый ультрафильтр $\xi_A \in A^*$ и обозначим $D = \{\xi_A | A \in \Delta\}$. Поскольку $|D| \leq |\Delta| = \mathfrak{c}$ ($\mathfrak{c}$ – мощность континуума), а для любого дискрета A мощность $|A^*| = |[A]_{\omega\mathbb{N}}| = |\omega\mathbb{N}| = 2^{\mathfrak{c}}$ (см. [12, c. 268]), то $\varnothing \neq A^* \setminus D \neq A^*$. Полагая $Y = \omega\mathbb{N} \setminus D$, получаем ω-насыщение (для $\mathbb{N}$), для которого никакой Ω-допустимой Δ-базы не существует. В качестве ω-допустимой Δ-базы, очевидно, подходит само семейство Δ. Проверим счетнокомпактность пространства Y. Пусть $M \subset Y$ и M счетно. Ясно, что $[M]_Y = [M]_{\omega\mathbb{N}} \setminus D$. А поскольку $|[M]_{\omega\mathbb{N}}| = 2^{\mathfrak{c}}$ (см. [12, c. 269]), то $[M]_Y \neq M$, что показывает существование в Y предельных точек для M.

Библиографические ссылки

1. Архангельский АВ. Об одном классе пространств, содержащем все метрические и все локально бикомпактные пространства. *Математический сборник*. 1965;67(1):55–88.

2. Morita K. Products of normal spaces with metric spaces. *Mathematische Annalen.* 1964;154(4):365–382.

3. Nagata Jun-iti. A note on M-spaces and topologically complete spaces. *Proceedings of the Japan Academy.* 1969;45(7):541–543. DOI: 10.3792/pja/1195520664.

4. Morita K. Countably-compactifiable spaces. *Science Reports of the Tokyo Kyoiku Daigaku. Section A.* 1973;12(313/328):7–15.

5. Burke DK, van Douwen EK. On countably compact extensions of normal locally compact M-spaces. *Set-Theoretic Topology.* 1977:81–89. DOI: 10.1016/B978-0-12-584950-0.50012-2.

6. Isiwata T. On closed countably-compactifications. *General Topology and its Applications.* 1974;4(2):143–167. DOI: 10.1016/0016-660X(74)90017-8.

7. Голдовт ИЮ, Тимохович ВЛ. Насыщения топологических пространств и проблема Морита. *Доклады Академии наук БССР.* 1977;21(9):777–780.

8. Левин МА, Тимохович ВЛ. М-пространства и сильная счетнокомпактифицируемость. *Доклады Академии наук БССР.* 1979;23(3):213–216.

9. Fleischman WM. A new extension of countable compactness. *Fundamenta Mathematicae.* 1970;67(1):1–9.

10. van Douwen EK, Reed GM, Roscoe AW, Tree IJ. Star covering properties. *Topology and its Applications.* 1991;39(1):71–103. DOI: 10.1016/0166-8641(91)90077-Y.

11. Архангельский АВ. Компактность. В: *Итоги науки и техники. Серия: Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Том 50*. Москва: ВИНИТИ; 1989. с. 5–128.

12. Энгелькинг Р. *Общая топология.* Антоновский МЯ, Архангельский АВ, переводчики. Москва: Мир; 1986. 752 с.

13. Кукрак ГО, Тимохович ВЛ. О пределе обратного спектра экспоненциальных пространств. *Вестник БГУ. Серия 1. Физика. Математика. Информатика.* 2001;1:51–55.

14. Hansard JD. Function space topologies. *Pacific Journal of Mathematics.* 1970;35(2):381–388.

15. Фролова ДС. О секвенциально собственных топологиях пространства отображений. *Труды Института математики.* 2013;21(1):102–108.

References

1. Arkhangel'skii AV. [One class of spaces containing all metric and all locally compact spaces]. *Matematicheskii sbornik*. 1965;67(1):55–88. Russian.

2. Morita K. Products of normal spaces with metric spaces. *Mathematische Annalen.* 1964;154(4):365–382.

3. Nagata Jun-iti. A note on M-spaces and topologically complete spaces. *Proceedings of the Japan Academy.* 1969;45(7):541–543. DOI: 10.3792/pja/1195520664.

4. Morita K. Countably-compactifiable spaces. *Science Reports of the Tokyo Kyoiku Daigaku. Section A.* 1973;12(313/328):7–15.

5. Burke DK, van Douwen EK. On countably compact extensions of normal locally compact M-spaces. *Set-Theoretic Topology.* 1977:81–89. DOI: 10.1016/B978-0-12-584950-0.50012-2.

6. Isiwata T. On closed countably-compactifications. *General Topology and its Applications.* 1974;4(2):143–167. DOI: 10.1016/0016-660X(74)90017-8.

7. Goldovt IYu, Timokhovich VL. [Saturations of topological spaces and the Morita problem]. *Doklady Akademii nauk BSSR.* 1977;21(9):777–780. Russian.

8. Levin MA, Timokhovich VL. [M-spaces and the strong countably-compactifiabillity]. *Doklady Akademii nauk BSSR.* 1979;23(3):213–216. Russian.

9. Fleischman WM. A new extension of countable compactness. *Fundamenta Mathematicae.* 1970;67(1):1–9.

10. van Douwen EK, Reed GM, Roscoe AW, Tree IJ. Star covering properties. *Topology and its Applications.* 1991;39(1):71–103. DOI: 10.1016/0166-8641(91)90077-Y.

11. Arkhangel'skii AV. [Compactness]. In: *Itogi nauki i tekhniki. Seriya: Sovremennye problemy matematiki. Fundamental'nye napravleniya. Tom 50* [Results of science and technology. Series: Modern problems of mathematics. Fundamental directions. Volume 50]. Moscow: VINITI; 1989. p. 5–128. Russian.

12. Engelking R. *General topology*. Warszawa: Polish Scientific Publishers; 1977. 626 p.

Russian edition: Engelking R. *Obshchaya topologiya*. Antonovskii MYa, Arkhangel'skii AV, translators. Moscow: Mir; 1986. 752 p.

13. Kukrak GO, Timokhovich VL. [On the limit of the inverse spectrum of exponential spaces]. *Vestnik BGU. Seriya 1. Fizika. Matematika. Informatika.* 2001;1:51–55. Russian.

14. Hansard JD. Function space topologies. *Pacific Journal of Mathematics.* 1970;35(2):381–388.

15. Frolova DS. On the family of sequentially proper topologies on the space of maps. *Trudy Instituta matematiki.* 2013;21(1): 102–108. Russian.

Статья поступила в редколлегию 12.02.2021.
Received by editorial board 12.02.2021.