

О НЕКОТОРЫХ ПРОБЛЕМАХ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В ПОЛУДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Б. С. КАЛИТИН¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Рассматривается задача о неустойчивости замкнутого положительно инвариантного множества M полудинамической системы на произвольном метрическом пространстве X . Второй метод Ляпунова для таких задач разработан достаточно полно в случае, когда множество M компактно, а пространство X локально компактно. Получены достаточные условия неустойчивости в терминах функций Ляпунова в двух ситуациях: M обладает окрестностью положительно устойчивых по Лагранжу полутраекторий; пространство X асимптотически компактно в некоторой окрестности множества M .

Ключевые слова: полудинамическая система; замкнутое множество; неустойчивость; функция Ляпунова.

ON SOME PROBLEMS OF INSTABILITY IN SEMI-DYNAMICAL SYSTEMS

B. S. KALITINE^a

^aBelarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

The problem of instability of a closed positively invariant set M of a semi-dynamical system on an arbitrary metric space X is considered. The Lyapunov's direct method for such problems has been developed quite completely in the case when M is compact and X is locally compact. In this article, we obtain sufficient conditions for instability in terms of Lyapunov functions in two situations: M has a neighbourhood of positive Lagrange stable semi-trajectories; the space X is asymptotically compact in some neighbourhood of M .

Keywords: semi-dynamical system; closed set; instability; Lyapunov function.

Введение

А. М. Ляпунов [1] оставил в наследие две широко известные теоремы о неустойчивости равновесия неавтономных дифференциальных уравнений с использованием вспомогательных функций (первая теорема о неустойчивости и вторая теорема о неустойчивости). Н. Г. Четаев [2, с. 34] обобщил их, сформулировав теорему, из которой обе теоремы Ляпунова следуют как частный случай. Позднее усиление первой теоремы Ляпунова – Четаева получено для периодических [3, с. 84] и почти периодических [4] дифференциальных уравнений. Развитие первой теоремы о неустойчивости для неавтономных дифференциальных уравнений связано с использованием теории предельных уравнений [5; 6] и идей [7], основанной на привлечении дополнительной функции, оценивающей скорость сходимости решений к множеству, на котором функция Ляпунова обращается в нуль.

Образец цитирования:

Калитин БС. О некоторых проблемах неустойчивости в полудинамических системах. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2021;1: 39–45.
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2021-1-39-45>

For citation:

Kalitine BS. On some problems of instability in semi-dynamical systems. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2021;1:39–45. Russian.
<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2021-1-39-45>

Автор:

Борис Сергеевич Калитин – кандидат физико-математических наук, доцент; профессор кафедры аналитической экономики и эконометрики экономического факультета.

Author:

Boris S. Kalitine, PhD (physics and mathematics), docent; professor at the department of analytical economics and econometrics, faculty of economy.
kalitine@yandex.by

Свойству неустойчивости замкнутых множеств динамической или полудинамической системы посвящен ряд работ (см. [8–14]), в которых используются арсенал качественных методов топологической динамики и метод функций Ляпунова. Так, например, В. И. Зубов [8, с. 49] предложил обобщение второй теоремы Ляпунова о неустойчивости для замкнутых множеств динамических систем в виде необходимых и достаточных условий.

В данной работе представлены новые результаты, относящиеся к развитию первой теоремы о неустойчивости. В отличие от утверждений монографий [13; 14], где рассматриваются свойства компактных множеств, в настоящей статье получены достаточные условия неустойчивости в терминах функций Ляпунова для замкнутых множеств полудинамических систем на произвольном метрическом пространстве.

Используем обозначения и определения монографий [9; 13–16]:

• \mathbb{R}, \mathbb{R}^+ и \mathbb{N} – множества вещественных, вещественных неотрицательных и натуральных чисел соответственно;

• \mathbb{R}^n – n -мерное евклидово пространство со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и нормой $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$;

• $B_\alpha = \{x \in X : \|x\| < \alpha\}$, $\alpha > 0$;

• $C^k(U, W)$ – множество k раз непрерывно дифференцируемых функций $f : U \rightarrow W$;

• \mathbf{K} – множество непрерывных возрастающих функций $a : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ таких, что $a(0) = 0$;

• $\mathbf{K}^\infty \subset \mathbf{K}$ – подмножество функций $a \in \mathbf{K}$ таких, что если $a(r) \rightarrow +\infty$, то $r \rightarrow +\infty$;

• X – метрическое пространство с метрикой $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$;

• $B(N, \alpha) = \{x \in X : d(N, x) < \alpha\}$ для $N \subset X$ и $\alpha > 0$;

• (x_n) – последовательность;

• $x_n \rightarrow x$ – последовательность (x_n) сходится к x ;

• (X, \mathbb{R}^+, π) – полудинамическая система с фазовым отображением $\pi : X \times \mathbb{R}^+ \rightarrow X$;

• $\pi(x, t) = xt \quad \forall x \in X$ и $\forall t \in \mathbb{R}^+$;

• аксиомы полудинамической системы:

(I) $x0 = x$ для каждого $x \in X$;

(II) $xt(\tau) = x(t + \tau)$ для каждого $x \in X$ и $t, \tau \in \mathbb{R}^+$;

(III) π непрерывно;

• $\pi_x : \mathbb{R}^+ \rightarrow X$ (или $x : t \rightarrow xt$) – движение (из $x \in X$);

• если $I \subset \mathbb{R}^+$, $Y \subset X$, $x \in Y$, $t \in I$, то $xI = \{xt : t \in I\}$, $YI = \{xt \in X : x \in Y, t \in I\}$;

• Y из X положительно инвариантно, если $Y\mathbb{R}^+ = Y$;

• $\text{Fr}Y$ и \bar{Y} – граница и замыкание множества Y в X соответственно;

• $\gamma^\pm(x) = x\mathbb{R}^\pm$ – положительная (отрицательная) полутраектория точки $x \in X$;

• $L^+(x) = \{y \in X : xt_n \rightarrow y, t_n \rightarrow +\infty \text{ при } n \rightarrow +\infty\}$ – множество ω -предельных точек для $x \in X$;

• (X, \mathbb{R}, π) – динамическая система, движения определены при всех $t \in \mathbb{R}$.

Если метрическое пространство X локально компактно, то полудинамическую (динамическую) систему называют локально компактной.

Определение 1. Замкнутое множество M из X называется:

• устойчивым, если

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall m \in M)(\exists \delta = \delta(\varepsilon, m) > 0) : B(m, \delta)\mathbb{R}^+ \subset B(M, \varepsilon);$$

• неустойчивым, если оно не является устойчивым, т. е.

$$(\exists \varepsilon > 0)(\exists m \in M)(\forall \delta > 0)(\exists p \in B(m, \delta))(\exists t^* > 0) : d(M, pt^*) = \varepsilon.$$

Замечание. Если замкнутое множество M не является положительно инвариантным, то оно очевидно неустойчиво. Поэтому в формулировках представленных ниже утверждений о неустойчивости речь идет лишь о положительно инвариантном замкнутом множестве M .

Метод функций Ляпунова

Сформулируем и докажем в этом разделе ряд новых утверждений о неустойчивости, дополняющих результаты работ [3; 13; 14]. Предварительно напомним следующее.

Лемма [9, р. 66]. Пусть X – произвольное метрическое пространство, K – подмножество X , $\gamma^+(x) \subset K$ (или $\gamma^-(x) \subset K$). Предположим $V \in C(K, \mathbb{R})$ – некоторая функция такая, что $V(xt)$ монотонно изменяется при всех $t \geq 0$ (соответственно при всех $t \leq 0$). Тогда если $L^+(x) \neq \emptyset$ ($L^-(x) \neq \emptyset$), то имеет место равенство $V(y) = V(z) \forall y, z \in L^+(x)$ (соответственно $V(y) = V(z) \forall y, z \in L^-(x)$).

Представим вариант развития теоремы Красовского о неустойчивости [3, с. 84], используя свойство положительной устойчивости по Лагранжу [17] для отдельных движений в окрестности замкнутого множества M полудинамической системы. Смысл новой идеи состоит в том, что, в отличие от теоремы в [3], на множестве, где производная функции Ляпунова равна нулю, можно допустить существование положительных полутраекторий, но только таких, которые подчинены определенным условиям.

Теорема 1. Пусть X – произвольное метрическое пространство, M – замкнутое подмножество X . Предположим, что существуют число $\sigma > 0$, окрестность $B(M, \sigma)$ для M , функция $V \in C(B(M, \sigma), \mathbb{R})$ и функция $a \in \mathbf{K}$ такая, что выполняются следующие условия:

- 1) $V(x) \leq a(d(M, x)) \forall x \in B(M, \sigma)$;
- 2) существует $t \in \text{Fr}M$ такое, что для любого $\alpha > 0$ найдется точка $p \in B(t, \alpha)$, для которой $V(p) > 0$ и $\gamma^+(p)$ – относительно компактная полутраектория;
- 3) $V(xt) \geq V(x) \forall x[0, t] \subset B(M, \sigma) \setminus M$ при $t > 0$;
- 4) если полутраектория $\gamma^+(y) \subset B(M, \sigma)$ и $V(\gamma^+(y)) \equiv V(y)$, то либо $d(M, yt) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, либо $d(\text{Fr}B(M, \sigma), \gamma^+(y)) = 0$.

Тогда M неустойчиво.

Доказательство. Зафиксируем число $\varepsilon > 0$, меньшее σ . В силу предположения 2) можно указать точки $t \in \text{Fr}M$ и $p \in B(t, \delta) \setminus M$ для $0 < \delta < \varepsilon$ такие, что $V(p) > 0$, а полутраектория $\gamma^+(p)$ относительно компактна.

С учетом непрерывности функции V и требования 1) существует число $\mu > 0$, для которого $|V(x)| < V(p)$, если только $d(M, x) < \mu$. Очевидно, можно считать $\mu < \varepsilon$. Отсюда на основании предположения 3), в частности, следует, что движение π_p не может оказаться во множестве $B(M, \mu)$, т. е. $d(pt, x) \geq \mu$ при всех $t > 0$.

Покажем, что точка pt покинет множество $\overline{B(M, \varepsilon)}$ при $t > 0$, что и будет соответствовать неустойчивости M . Действительно, если это не так, то $d(M, pt) < \varepsilon \forall t > 0$. Следовательно, с учетом предыдущих построений и условия $0 < \mu < \varepsilon$ имеем оценки

$$\mu \leq d(M, pt) \leq \varepsilon \quad \forall t > 0.$$

По предположению замыкание $\overline{\gamma^+(p)}$ есть компактное множество. Значит, на основании утверждения [15, р. 41] ω -предельное множество $L^+(p)$ для полутраектории $\gamma^+(p)$ непусто, компактно, связно и положительно инвариантно. Более того, существует полутраектория $\gamma^+(y) \subset L^+(p)$ для любой точки $y \in L^+(p)$. Так как по построению $L^+(p) \subset \overline{B(M, \varepsilon) \setminus B(M, \mu)} \subset B(M, \sigma)$, то согласно лемме при $y \in L^+(p)$ имеем тождество $V(\gamma^+(y)) \equiv V(y)$ и при этом $\gamma^+(y) \subset B(M, \sigma)$. Более того, по построению выполняется условие

$$\mu \leq d(M, \gamma^+(y)) \leq \varepsilon. \tag{1}$$

Далее согласно предположению 4) будем иметь один из случаев:

$$d(M, yt) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow +\infty \text{ либо } d(\text{Fr}B(M, \sigma), \gamma^+(y)) = 0.$$

Однако и то и другое невозможно на основании (1) и предположения $\varepsilon < \sigma$. Полученное противоречие и доказывает неустойчивость множества M .

Укажем на возможную модификацию теоремы 1 в пользу практических приложений.

Определение 2. Пусть G – открытое подмножество X , функция $V: \overline{G} \rightarrow \mathbb{R}^+$ принадлежит к классу $C(\overline{G}, \mathbb{R}^+)$. Будем говорить, что функция $V(x)$ дифференцируема вдоль движения $\pi_x, x \in G$, полудинамической системы (X, \mathbb{R}^+, π) (или имеет производную по времени вдоль движения), если для каждой точки $x \in G$ величина $V(xt) - V(x)$ определена для всех достаточно малых $|t| > 0$ и если существует предел

$$\dot{V}(x) = \liminf_{t \rightarrow 0} \frac{V(xt) - V(x)}{t}.$$

При этом функцию $\dot{V}(x)$ называют производной по времени функции $V(x)$ вдоль движения π_x в точке x (или просто производной по времени). Более того, функция $V(xt)$ оказывается дифференцируемой по t , и мы будем писать $\dot{V} \in C(B(M, \sigma), \mathbb{R})$.

Если функция Ляпунова является дифференцируемой, то требование 4) теоремы 1 можно модифицировать, а именно из нее вытекает следующий результат.

Теорема 2. Пусть выполнены предположения и условия 1), 2) теоремы 1. Тогда если $\dot{V} \in C(B(M, \sigma), \mathbb{R})$ и имеют место условия:

1) $\dot{V}(x) \geq 0 \quad \forall x \in B(M, \sigma) \setminus M;$

2) если полутраектория $\gamma^+(y) \subset B(M, \sigma)$ и $\dot{V}(\gamma^+(y)) \equiv 0$, то либо $d(M, yt) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, либо $d(\text{Fr}B(M, \sigma), \gamma^+(y)) = 0$, то множество M неустойчиво.

Пример. Пусть динамическая система определяется дифференциальным уравнением Лъенара следующего вида:

$$\ddot{x} - 3ax^2\dot{x} - b(\dot{x} - ax^3)^{2p-1} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad p \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

Покажем, что инвариантное множество $M = \{(x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^2 : x = \dot{x} = 0\}$ этого уравнения неустойчиво для всех значений параметров $a \in \mathbb{R}$ и $b > 0$. Перейдем от уравнения (2) к соответствующей системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = 3ax^2y + b(y - ax^3)^{2p-1}. \end{cases} \quad (3)$$

Рассмотрим знакопостоянную функцию Ляпунова

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(y - ax^3)^2,$$

для которой производная по времени в силу системы (3)

$$\dot{V}(x, y) = b(y - ax^3)^{2p}, \quad b > 0.$$

Видим, что функция \dot{V} неотрицательна и выполнены условия 1), 2) теоремы 1, а также условие 1) теоремы 2. Покажем, что имеет место оставшееся для проверки условие 2) теоремы 2. С этой целью выпишем множество

$$Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \dot{V}(x, y) = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = ax^3\}.$$

Нетрудно проверить, что Y – инвариантное множество системы (3). При этом всякое решение $(x(t), y(t))$, $t \geq 0$, расположенное на этом множестве, удовлетворяет скалярному дифференциальному уравнению $\dot{x} = ax^3$.

Если $a < 0$, то ясно, что $|x(t)| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, а значит, и $|y(t)| \equiv |ax^3(t)| \rightarrow 0$. Поэтому условие 2) теоремы 2 выполняется для первого из вариантов.

Если же $a > 0$, то $|x(t)| \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow +\infty$, поэтому условие 2) теоремы 2 выполняется для второго из вариантов.

Следовательно, на основании теоремы 2 нулевое решение системы (3) неустойчиво при $a \neq 0$, $b > 0$, что влечет неустойчивость множества M дифференциального уравнения (2).

Наконец, если $a = 0$, то неустойчивость нулевого решения устанавливается непосредственным интегрированием системы (3).

Заметим, что поскольку для данного примера множество Y содержит нетривиальные целые положительные траектории, то теорема Красовского о неустойчивости [3, с. 84] с функцией $V(x, y)$ здесь не может быть использована.

Напомним следующие понятия.

Свойство интегральной непрерывности [17, с. 14]. Для любой точки $x \in X$, любого числа $T > 0$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $d(xt, yt) < \varepsilon$ при всех $y \in X$ и $t \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих неравенствам $d(x, y) < \delta$ и $0 \leq t \leq T$ ($-T \leq t \leq 0$).

Определение 3 [18]. Полудинамическая система (X, \mathbb{R}^+, π) называется асимптотически компактной на множестве W , если для любой пары последовательностей $(x_n) \subset W$ и $(t_n) \subset \mathbb{R}^+$ такой, что $x_n[0, t_n] \in W$ и $t_n \rightarrow +\infty$, последовательность $(x_n t_n)$ относительно компактна.

Примеры асимптотически компактных полудинамических систем для произвольных метрических пространств (не обязательно локально компактных) приведены в [18; 19].

Докажем теперь аналог теоремы о неустойчивости [3, с. 77] для полудинамических систем.

Теорема 3. Пусть X – произвольное метрическое пространство, M – замкнутое положительно инвариантное подмножество X . Предположим, что существуют число $\Delta > 0$, функция $\dot{V} \in C(B(M, \Delta), \mathbb{R})$, функции $a \in \mathbf{K}^\infty$ и $b \in \mathbf{K}$ такие, что выполняются следующие условия:

$$1) V(x) \leq a(d(M, x)) \quad \forall x \in B(M, \Delta) \text{ и } V(x) = 0 \quad \forall x \in M;$$

2) множество $G = \{x \in B(M, \Delta) \setminus M : V(x) \geq 0\}$ содержит последовательность $(q_n) \subset B(M, \Delta) \setminus M$ такую, что $V(q_n) = 0$ и $d(M, q_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$;

$$3) \dot{V}(x) > b(d(M, x)) \quad \forall x \in B(M, \Delta) \setminus M.$$

Тогда M неустойчиво.

Если, кроме того, полудинамическая система (X, \mathbb{R}^+, π) асимптотически компактна в $\overline{B(M, \Delta)}$, то в области G существует отрицательная полутраектория $\gamma^-(y)$ такая, что:

$$a) d(M, \gamma^-(y)) = 0;$$

$$б) V(yt) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow -\infty.$$

Доказательство. Докажем, что M неустойчиво при выполнении требований 1)–3). Пусть $(q_n) \subset B(M, \Delta) \setminus M$ – последовательность точек, для которых

$$V(q_n) = 0 \text{ и } d(M, q_n) \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

В силу предположения 3) имеем $V(q_n t) > 0$ для тех t , при которых $q_n(0, t) \subset B(M, \Delta)$. Покажем, что существует последовательность моментов времени $(t_n) \subset \mathbb{R}^+$ такая, что

$$d(M, q_n t) < \Delta \text{ при } 0 \leq t < t_n \text{ и } d(M, q_n t_n) = \Delta \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (4)$$

что и будет соответствовать неустойчивости M . Для этого зафиксируем натуральное число $n \in \mathbb{N}$ и число $\tau > 0$. Если $d(M, q_n \tau) > \Delta$, то очевидно, что искомое значение t_n , удовлетворяющее (4), найдется, причем $0 < t_n < \tau$.

Предположим теперь, что $d(M, q_n \tau) < \Delta$. По условию 3) теоремы вдоль движения $q_n : t \rightarrow q_n t$ при $t \geq \tau$ таких, что $d(M, q_n t) < \Delta$, имеем

$$\dot{V}(q_n t) \geq b(d(M, q_n t)). \quad (5)$$

Поскольку функция $V(x)$ непрерывна, причем $V(x) = 0 \quad \forall x \in M$, то для числа $V(q_n \tau) = \alpha_n > 0$ на основании предположения 1) существует положительное число $\delta_n > 0$, для которого имеет место условие

$$|V(x)| < \alpha_n \text{ при } d(M, x) < \delta_n. \quad (6)$$

С учетом (5) производная $\dot{V}(q_n t)$ неотрицательная, поэтому $V(q_n t) \geq V(q_n \tau)$ при $t \geq \tau$ таких, что $d(M, q_n t) < \Delta$. На основании (6) это означает, что $d(M, q_n t) \geq \delta_n$ при $t \geq \tau$, т. е. можем записать

$$b(d(M, q_n t)) \geq b(\delta_n) > 0 \text{ при } t \geq \tau \text{ таких, что } d(M, q_n t) < \Delta.$$

Следовательно, при $t \geq \tau$ таких, что $d(M, q_n t) < \Delta$, выполняются соотношения

$$V(q_n t) = V(q_n \tau) + \int_{\tau}^t \dot{V}(q_n s) ds \geq V(q_n \tau) + \int_{\tau}^t b(d(M, q_n s)) ds \geq V(q_n \tau) + b(\delta_n)(t - \tau).$$

Отсюда следует, что при фиксированных $n \in \mathbb{N}$ и $\tau > 0$ правая часть неограниченно возрастает по времени $t > \tau$. С учетом предположения 1) это означает, что при увеличении $t > \tau$ неограниченно

возрастает величина $a(d(M, q_n t))$. Более того, если $a(d(M, q_n t)) \rightarrow +\infty$, то по свойству функции a имеем $d(M, q_n t) \rightarrow +\infty$. В частности, наступит момент $t_n > \tau$, удовлетворяющий (4). Таким образом, последовательность (t_n) со свойствами (4) существует. Все в совокупности соответствует свойству неустойчивости множества M .

Предположим теперь, что полудинамическая система (X, \mathbb{R}^+, π) асимптотически компактна в $\overline{B(M, \Delta)}$. Положим $p_n = q_n t_n$ и рассмотрим последовательность точек $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Эта последовательность обладает некоторой предельной точкой y на основании свойства асимптотической компактности. Более того, при выполнении равенства (4) имеем $d(M, y) = \Delta$. Покажем, что полутраектория $\gamma^-(y)$ и является искомой в области G . Для этого покажем сначала, что она принадлежит множеству G .

Пусть это не так. Тогда можно указать момент $s < 0$ такой, что $ys \notin G$. Поскольку по построению $t_n \rightarrow +\infty$ на основании положительной инвариантности M , то для достаточно большого натурального числа $N \in \mathbb{N}$ будем иметь неравенство $t_n + s > 0 \forall n \geq N$. С учетом сходимости $q_n t_n \rightarrow y$ и свойства интегральной непрерывности движений динамических систем для достаточно больших $n \geq N$ точки $q_n(t_n + s)$ также покидают множество G . Но последнее невозможно в силу (4), поскольку имеет место условие $0 < t_n + s < t_n$. Полученное противоречие показывает, что $\gamma^-(y) \subset G$.

Докажем теперь утверждение a , т. е. что существует последовательность $(s_n) \subset \mathbb{R}^-$, $s_n \rightarrow -\infty$ при $n \rightarrow \infty$, такая, что

$$d(M, ys_n) \rightarrow 0 \text{ при } s_n \rightarrow -\infty. \quad (7)$$

Действительно, если это не так, то можно указать число $\delta > 0$ такое, что

$$d(M, yt) \geq \delta > 0 \quad \forall t \leq 0. \quad (8)$$

Положим в неравенстве (5) $t = t_n$ и перейдем затем к пределу при $n \rightarrow \infty$. Тогда получим неравенство $\dot{V}(y) \geq b(d(M, y))$. Поскольку $\gamma^-(y) \subset B(M, \Delta) \setminus M$, то с учетом (8) будет

$$\dot{V}(yt) \geq b(d(M, yt)) \geq b(\delta) > 0 \quad \forall t \leq 0. \quad (9)$$

Воспользуемся теперь формулой

$$V(ys_n) = V(y) + \int_0^t \dot{V}(y\tau) d\tau.$$

Оценим правую часть этого равенства, используя (9) и тот факт, что $t < 0$. Имеем

$$V(yt) = V(y) + \int_0^t \dot{V}(ys) ds \leq V(y) + tb(\delta) \quad \forall t < 0.$$

Отсюда следует, что при $t \rightarrow -\infty$ величина $V(yt)$ становится отрицательной. Однако по построению полутраектория $\gamma^-(y) \subset G$, а значит, $V(yt) \geq 0 \forall t \leq 0$, и мы приходим к противоречию. Таким образом, для некоторой последовательности $(s_n) \subset \mathbb{R}^-$ выполняется условие (7).

Наконец, докажем утверждение b . Используя построенную выше последовательность $(s_n) \subset \mathbb{R}^-$, $s_n \rightarrow -\infty$ при $n \rightarrow \infty$, рассмотрим последовательность величин $(V(ys_n)) \subset \mathbb{R}^+$. На основании (7), а также условия $V(\gamma^-(y)) \geq 0$ и предположения 1) имеем $V(ys_n) \rightarrow 0$. Кроме того, из условия 3) следует, что при заданном y функция $V(yt)$ (из \mathbb{R}^- в \mathbb{R}^+) монотонная, а значит, при $t \rightarrow -\infty$ она имеет единственный предел. Это означает, что из предела $V(ys_n) \rightarrow 0$ следует предел $V(yt) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow -\infty$. Условие b доказано.

Теорема полностью доказана.

В заключение отметим, что примером приложения теоремы 3 может служить известная теорема 12.1 [3, с. 77], поскольку любое движение в шаре $B(M, \Delta)$ с компактным инвариантным множеством M локально компактной динамической системы удовлетворяет определению асимптотической компактности.

Библиографические ссылки

1. Ляпунов АМ. *Общая задача об устойчивости движения*. Москва: Государственное издательство технико-теоретической литературы; 1950. 472 с.
2. Четаев НГ. *Устойчивость движения*. 2-е издание. Москва: Гостехиздат; 1955. 207 с.

3. Красовский НН. *Некоторые задачи теории устойчивости движения*. Москва: Государственное издательство физико-математической литературы; 1959. 211 с.
4. Kalitine BS, Kalitine PB. On the stability of almost periodic systems. *Вестник БГУ. Серия 1. Физика. Математика. Информатика*. 2014;1:78–82.
5. Андреев АС. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости неавтономных систем. *Прикладная математика и механика*. 1979;43(5):796–805.
6. Калитин БС. Устойчивость неавтономных динамических систем. В: *Актуальные задачи теории динамических систем управления*. Минск: Наука и техника; 1989. с. 37–46.
7. Калитин БС. О решении задач устойчивости прямым методом Ляпунова. *Известия высших учебных заведений. Математика*. 2017;6:33–43.
8. Зубов ВИ. *Устойчивость движения (методы Ляпунова и их применение)*. 2-е издание. Москва: Высшая школа; 1984. 232 с.
9. Bhatia NP, Szegő GP. *Stability theory of dynamical systems*. Berlin: Springer-Verlag; 1970. XII, 225 p.
10. Kelllett CM. Classical converse theorems in Lyapunov's second method. *Discrete and Continuous Dynamical Systems – B*. 2015;20(8):2333–2360. DOI: 10.3934/dcdsb.2015.20.2333.
11. Калитин БС. В-устойчивость и проблема Флорио – Сейберта. *Дифференциальные уравнения*. 1999;35(4):453–463.
12. Калитин БС. Неустойчивость замкнутых инвариантных множеств полудинамических систем. Метод знакопостоянных функций Ляпунова. *Математические заметки*. 2009;85(3):382–394. DOI: 10.4213/mzm4115.
13. Калитин БС. *Устойчивость динамических систем (Качественная теория)*. Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing; 2012. 258 с.
14. Калитин БС. *Устойчивость динамических систем (Метод знакопостоянных функций Ляпунова)*. Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing; 2013. 259 с.
15. Saperstone SH. *Semidynamical systems in infinite dimensional spaces*. New York: Springer-Verlag; 1981. 474 p. (Applied mathematical sciences; volume 37). DOI: 10.1007/978-1-4612-5977-0.
16. Сибирский КС, Шубь АС. *Полудинамические системы (Топологическая теория)*. Кишинев: Штиинца; 1987. 272 с.
17. Сибирский КС. *Введение в топологическую динамику*. Кишинев: Редакционно-издательский отдел Академии наук Молдавской ССР; 1970. 144 с.
18. Arredondo JH, Seibert P. On a characterization of asymptotic stability. *Aportaciones Matemáticas. Serie: Comunicaciones*. 2001;29:11–16.
19. Ladyzhenskaya O. *Attractors for semigroups and evolution equations*. Cambridge: Cambridge University Press; 1991. 73 p.

References

1. Lyapunov AM. *Obshchaya zadacha ob ustoichivosti dvizheniya* [General problem on stability of motion]. Moscow: Gosudarstvennoe izdatel'stvo tekhniko-teoreticheskoi literatury; 1950. 472 p. Russian.
2. Chetaev NG. *Ustoichivost' dvizheniya* [Stability of motion]. 2nd edition. Moscow: Gostekhizdat; 1955. 207 p. Russian.
3. Krasovskii NN. *Nekotorye zadachi teorii ustoichivosti dvizheniya* [Some problems of the theory of stability of motion]. Moscow: Gosudarstvennoe izdatel'stvo fiziko-matematicheskoi literatury; 1959. 211 p. Russian.
4. Kalitine BS, Kalitine PB. On the stability of almost periodic systems. *Vestnik BGU. Seriya 1. Fizika. Matematika. Informatika*. 2014;1:78–82.
5. Andreev AS. [On the asymptotic stability and instability of non-autonomous systems]. *Prikladnaya matematika i mekhanika*. 1979;43(5):796–805. Russian.
6. Kalitine BS. [Stability of non-autonomous dynamic systems]. In: *Aktual'nye zadachi teorii dinamicheskikh sistem upravleniya* [Actual problems of the theory of dynamic control systems]. Minsk: Nauka i tekhnika; 1989. p. 37–46. Russian.
7. Kalitine BS. On solving the problems of stability by Lyapunov's direct method. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Matematika*. 2017;6:33–43. Russian.
8. Zubov VI. *Ustoichivost' dvizheniya (metody Lyapunova i ikh primeneniye)* [Stability of motion (the methods of Lyapunov and their application)]. 2nd edition. Moscow: Vysshaya shkola; 1984. 232 p. Russian.
9. Bhatia NP, Szegő GP. *Stability theory of dynamical systems*. Berlin: Springer-Verlag; 1970. XII, 225 p.
10. Kelllett CM. Classical converse theorems in Lyapunov's second method. *Discrete and Continuous Dynamical Systems – B*. 2015;20(8):2333–2360. DOI: 10.3934/dcdsb.2015.20.2333.
11. Kalitine BS. [B-stability and the Florio – Seibert problem]. *Differentsial'nye uravneniya*. 1999;35(4):453–463. Russian.
12. Kalitine BS. [Instability of closed invariant sets of semi-dynamical systems. The method of semi-definite Lyapunov functions]. *Matematicheskie zametki*. 2009;85(3):382–394. Russian. DOI: 10.4213/mzm4115.
13. Kalitine BS. *Ustoichivost' dinamicheskikh sistem (Kachestvennaya teoriya)* [Stability of dynamical systems (Qualitative theory)]. Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing; 2012. 258 p. Russian.
14. Kalitine BS. *Ustoichivost' dinamicheskikh sistem (Metod znakovostoyannykh funktsii Lyapunova)* [Stability of dynamical systems (Method of semi-definite Lyapunov functions)]. Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing; 2013. 259 p. Russian.
15. Saperstone SH. *Semidynamical systems in infinite dimensional spaces*. New York: Springer-Verlag; 1981. 474 p. (Applied mathematical sciences; volume 37). DOI: 10.1007/978-1-4612-5977-0.
16. Sibirskii KS, Shube AS. *Poludinamicheskie sistemy (Topologicheskaya teoriya)* [Semi-dynamic systems (Topological theory)]. Kishinev: Shtiintsa; 1987. 272 p. Russian.
17. Sibirskii KS. *Vvedenie v topologicheskuyu dinamiku* [Introduction to topological dynamics]. Kishinev: Redaktsionno-izdatel'skii otdel Akademii nauk Moldavskoi SSR; 1970. 144 p. Russian.
18. Arredondo JH, Seibert P. On a characterization of asymptotic stability. *Aportaciones Matemáticas. Serie: Comunicaciones*. 2001;29:11–16.
19. Ladyzhenskaya O. *Attractors for semigroups and evolution equations*. Cambridge: Cambridge University Press; 1991. 73 p.