

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК 519.63

ПРОКОНИНА
Елена Владимировна

РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ И ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ
ТРЕХМЕРНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ СО СМЕШАННЫМИ
ПРОИЗВОДНЫМИ

**Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук**

**по специальности 05.13.18 – математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ**

Минск, 2021

Научная работа выполнена в Белорусском государственном университете.

Научный руководитель – Волков Василий Михайлович,
доктор физико-математических наук, доцент,
заведующий кафедрой веб-технологий
и компьютерного моделирования
Белорусского государственного университета.

Официальные оппоненты: Таранчук Валерий Борисович,
доктор физико-математических наук, профессор,
профессор кафедры компьютерных технологий
и систем
Белорусского государственного университета;

Баханович Сергей Викторович,
кандидат физико-математических наук,
заместитель директора по научной и
инновационной работе
ГНУ «Институт математики НАН Беларуси».

Оппонирующая организация – УО «Гродненский государственный
университет имени Янки Купалы».

Защита состоится **16 апреля** 2021 г. в **10.00** часов на заседании совета по защите диссертаций Д 02.01.02 при Белорусском государственном университете по адресу: 220030, г. Минск, ул. Ленинградская, 8 (корпус юридического факультета), ауд. 407.

Телефон ученого секретаря – (017) 209-57-09.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке Белорусского государственного университета.

Автореферат разослан «__» марта 2021 г.

Ученый секретарь
совета по защите диссертаций
кандидат физ.-мат. наук доцент

Е.С. Чеб

ВВЕДЕНИЕ

Дифференциальные уравнения в частных производных, в частности, уравнения эллиптического типа, имеют широкий спектр приложений в задачах теплопроводности, диффузии, теории потенциала и др. Как правило, в большинстве практически значимых случаев найти точное решение этих уравнений не удается, поэтому наиболее широкое применение получили приближённые и численные методы.

Численные методы решения дифференциальных уравнений основаны на построении некоторой дискретной модели дифференциальной задачи в виде систем алгебраических уравнений, для решения которых, в свою очередь, используются прямые или итерационные методы.

В данной работе рассматриваются вопросы построения разностных схем и итерационных методов решения многомерных эллиптических задач со смешанными производными и разрывными коэффициентами. На основе сравнительного анализа различных разностных схем показана зависимость скорости сходимости итерационных методов реализации дискретной задачи от способа аппроксимации смешанных производных, предложена наиболее эффективная с этой точки зрения схема. В качестве итерационного алгоритма выбран метод би-сопряженных градиентов с переобуславливателем Фурье-Якоби, использование которого позволяет практически устранить рост числа итераций для достижения заданной точности при уменьшении шага сетки и сильной неоднородности коэффициентов задачи. Предложенная схема аппроксимации смешанных производных вместе с итерационной техникой и методом фиктивных областей составляют основу разработанной методики, эффективность которой продемонстрирована на примере решения прямой задачи электроимпедансной томографии.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с научными программами (проектами), темами

Диссертационная работа выполнялась в рамках НИР по теме 1.5.03.1. «Спектрально-разностные методы и алгоритмы цифровой обработки сигналов для решения задач математической физики», входящей в ГПНИ «Конвергенция» (2011-2015гг) и НИР по теме 1.5.01 «Спектрально-разностные методы и итерационные алгоритмы для многомерных задач математической физики», входящей в ГПНИ «Конвергенция» (2016-2020гг).

Цель и задачи исследования

Целью исследования является построение эффективных разностных методов и итерационных алгоритмов их реализации для многомерных эллиптических уравнений со смешанными производными, применительно к численному анализу задач электроимпедансной томографии анизотропных сред.

Указанная цель определяет следующие *задачи исследования*:

- провести сравнительный анализ различных способов разностной аппроксимации смешанных производных с точки зрения эффективности итерационной реализации разностных схем для многомерных эллиптических уравнений;
- на основе численных экспериментов исследовать эффективность различных типов переобусловливателей при итерационной реализации разностных схем для эллиптических уравнений со смешанными производными и сильно неоднородными коэффициентами, включая случай метода фиктивных областей;
- на примере модельных задач изучить закономерности трансформации спектра дискретной разностной задачи и ускорения сходимости итераций при использовании различных типов переобусловливателей;
- апробировать эффективность разработанных методик на примере решения прямой задачи электроимпедансной томографии головы человека с учетом анизотропии проводимости костей черепа и белого вещества мозга.

Объект исследования: многомерные эллиптические уравнения со смешанными производными.

Предмет исследования: разностные схемы и итерационные методы их реализации для решения многомерных задач анизотропной диффузии с существенно неоднородными коэффициентами.

Научная новизна

1. Установлена зависимость скорости сходимости итерационного метода би-сопряженных градиентов с различными типами переобусловливателей от выбора схемы аппроксимации смешанных производных при решении многомерных задач анизотропной диффузии слоистых сред.

2. На примере модельной задачи показано, что для различных схем аппроксимации смешанных производных наблюдаются различия в

трансформации спектра переобусловленной матрицы дискретной задачи, следствием чего являются различия в скорости сходимости итераций.

3. Предложена численная методика решения многомерных задач анизотропной диффузии слоистых сред, включающая схему разностной аппроксимации смешанных производных и итерационный метод би-сопряженных градиентов с переобусловливателем Фурье-Якоби, которая по результатам численных экспериментов превосходит известные аналоги.

Положения, выносимые на защиту

1. Результаты сравнительного анализа разностных схем для многомерных эллиптических задач, позволившие выявить влияние схемы аппроксимации смешанных производных на эффективность итерационной реализации дискретной модели в случае анизотропных задач с существенно неоднородными разрывными коэффициентами. На основе результатов сравнительного анализа определена наиболее адекватная схема и итерационный алгоритм ее реализации.

2. Численные оценки эффективности сжатия спектров разностных операторов анизотропной диффузии при использовании различных схем аппроксимации смешанных производных и различных типов переобусловливателей.

3. Численная методика решения многомерных стационарных краевых задач для уравнений анизотропной диффузии с существенно неоднородными разрывными коэффициентами на основе консервативной разностной схемы второго порядка аппроксимации и итерационного метода би-сопряженных градиентов с переобусловливателем Фурье-Якоби.

4. Численные оценки влияния фактора анизотропии проводимости биологических тканей и металлических имплантов на пространственное распределение потенциала в задачах электроимпедансной томографии головы человека, полученные с использованием разработанной методики.

Личный вклад соискателя ученой степени

Результаты диссертационной работы получены автором самостоятельно. В работах, опубликованных с научным руководителем В.М. Волковым [2, 3], последнему принадлежит математическая постановка задачи, обсуждение возможных подходов к ее решению и полученных результатов. В совместных работах с В.М. Волковым, С.И. Туровцом, А. Малони и А. Жердецким [1] соавторам принадлежит физическая постановка задачи, подготовка входных

данных задачи на основе магниторезонансной томографии головы человека и обсуждение прикладных аспектов полученных результатов.

Апробация диссертации и информация об использовании её результатов

Результаты исследований докладывались на следующих конференциях и семинарах:

- XI Белорусской математической конференции, Минск, 4-9 ноября 2012 г.;
- 2-й Международной научно-практической конференции «Веб-программирование и Интернет-технологии WebConf2012»: Минск, БГУ, 5–7 июня 2012 г.;
- XVII Республиканской научной конференции студентов и аспирантов «Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях», Гомель, ГГУ им. Ф. Скорины, 24-26 марта 2014 г.;
- XVI Международной научной конференции по дифференциальным уравнениям "Еругинские чтения - 2014", Новополоцк, 20-22 мая 2014 г.;
- Республиканской научно-практической конференции, посвященной 85-летию лауреата Нобелевской премии Ж.И. Алферова «Математические и физические методы исследований: научный и методический аспекты», Брест, БрГУ, 16-17 апр. 2015 г.;
- 3-й Международной научно-практической конференции «Веб-программирование и Интернет-технологии WebConf2015»: Минск, БГУ, 12–14 мая 2015 г.;
- Международной заочной научно-практической конференции «Молодежный форум: технические и математические науки», Воронеж, ФГБОУ ВО «ВГЛТУ», 9-12 ноября 2015 г.;
- Международной научной конференции «XII Белорусская математическая конференция», Минск, 5-10 сентября 2016 г.;
- 30-ой Международной научной конференции «Математические методы в технике и технологиях», СПбГТИ(ТУ), СПбПУ, СПИИРАН, Санкт-Петербург, Россия, 30 мая – 2 июня 2017 г.; БГАТУ, БГУ, БГТУ, БНТУ, БГУИР, Минск, Беларусь, 10 – 12 октября 2017 г.; СГТУ, Саратов, Россия, 25 – 27 октября 2017 г.;
- VI Международной научно-практической конференции «Вычислительные методы, модели и образовательные технологии», Брест, БрГУ, 19 октября 2017 г.;

- 4-й Международной научно-практической конференции «Веб-программирование и Интернет-технологии WebConf2018»: Минск, БГУ, 14–18 мая 2018 г.

Опубликованность результатов диссертации

Основные результаты диссертации опубликованы в 16 научных работах, в числе которых 4 статьи в научных изданиях в соответствии с п. 18 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь, в том числе 1 статья в зарубежном издании (общим объемом 2,8 авторских листов), 1 статья в сборнике научных работ, 1 статья в сборнике материалов международной научной конференции, 10 тезисов докладов на научных конференциях.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, общей характеристики работы, четырех глав, заключения и библиографического списка. Первая глава содержит обзор литературы по теме диссертации. Основные результаты диссертации приводятся во второй, третьей и четвертой главах. Полный объем диссертации составляет 107 страниц. Работа содержит 31 рисунок (на 27 страницах) и 1 таблицу (на 1 странице). Библиографический список состоит из 133 наименований, включая собственные публикации автора (на 13 страницах).

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

В **первой главе** диссертации дан обзор литературы по вопросам построения и исследования разностных методов решения уравнений математической физики. В *разделе 1.1* рассмотрены принципы построения эффективных разностных моделей: однородность, консервативность и монотонность. Более подробное внимание уделено проблеме построения разностных схем для многомерных эллиптических уравнений. В частности, отмечено, что условие консервативности является необходимым условием сходимости разностных схем в классе задач с разрывными коэффициентами [6]. Немало трудностей существует также с аппроксимацией смешанных производных.

В *разделе 1.2* приведен обзор итерационных методов, используемых для решения систем сеточных уравнений. Отмечены преимущества многосеточных методов и альтернативных подходов, основанных на использовании методов

класса сопряженных градиентов. Основные проблемы итерационной реализации сеточных уравнений связаны с ростом числа обусловленности их матрицы при уменьшении шага сетки и с ростом неоднородности коэффициентов задачи. В этой связи рассмотрен ряд переобусловливателей, используемых в неявных итерационных методах. Среди наиболее перспективных переобусловливателей отмечены два подхода, один из которых основан на неполной LU факторизации системной матрицы, а второй на использовании комбинации диагонального переобусловливателя Якоби и быстрого дискретного преобразования Фурье для обращения матрицы Пуассона. К сожалению, возможности последнего ограничены случаем прямоугольной области задачи.

В *разделе 1.3* анализируется гипотеза о том, может ли эффективность итерационной реализации разностных схем зависеть от конкретного способа аппроксимации дифференциальной задачи. В связи с этим возникает и другой вопрос: возможно ли выделить разумные критерии, позволяющие априорно судить о перспективности определенного класса разностных схем с точки зрения эффективности применения стандартных итерационных методов? Ранее данная гипотеза обсуждалась в работах ряда авторов в отношении принципов монотонности и консервативности.

Необходимость отдельного рассмотрения метода фиктивных областей (*раздел 1.4*) обусловлена двумя причинами. Во-первых, он позволяет приводить сложную геометрию задачи к прямоугольной форме, что не только упрощает построение сетки и постановку краевых условий, но и снимает ограничения на использование одного из эффективных переобусловливателей Фурье-Якоби. Во-вторых, использование метода фиктивных областей предъявляет весьма жесткие требования к технике итерационной реализации в силу естественного ухудшения при этом свойства обусловленности матрицы дискретной модели.

Во **второй главе** в *разделе 2.1* рассматривается задача Дирихле для уравнения эллиптического типа, описывающая распределение электрического потенциала в анизотропном изолированном проводнике в плоской прямоугольной области D с границей Γ :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma_{yx} \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_{yy} \frac{\partial u}{\partial y} \right) = f(x, y), \quad (x, y) \in D, \quad (1)$$

$$u(x, y)|_{(x,y) \in \Gamma} = 0.$$

Коэффициенты уравнения (1) определяются компонентами тензора проводимости $\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix}$. Вычисления компонент тензора проводимости анизотропной среды осуществляется с помощью преобразования плоских вращений:

$$\sigma = M \cdot \sigma_0 \cdot M^T, \quad (2)$$

где σ_0 – тензор проводимости в локальной системе координат, в которой направление анизотропии ориентировано вдоль координатных осей:

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} \sigma_R & 0 \\ 0 & \sigma_\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где M – матрица плоских вращений, σ_R и σ_τ – компоненты тензора проводимости в локальной системе координат в радиальном и тангенциальном направлениях в отношении траектории поворота по направлению к глобальной системе координат.

В разделе 2.2 рассмотрены три варианта схем второго порядка точности для аппроксимации смешанных производных задачи (1). Для удобства индексации компонент сеточных функций в многомерном случае удобно пронумеровать точки шаблона, например, как это показано на рисунке 1. Это позволяет избежать многоиндексных обозначений.

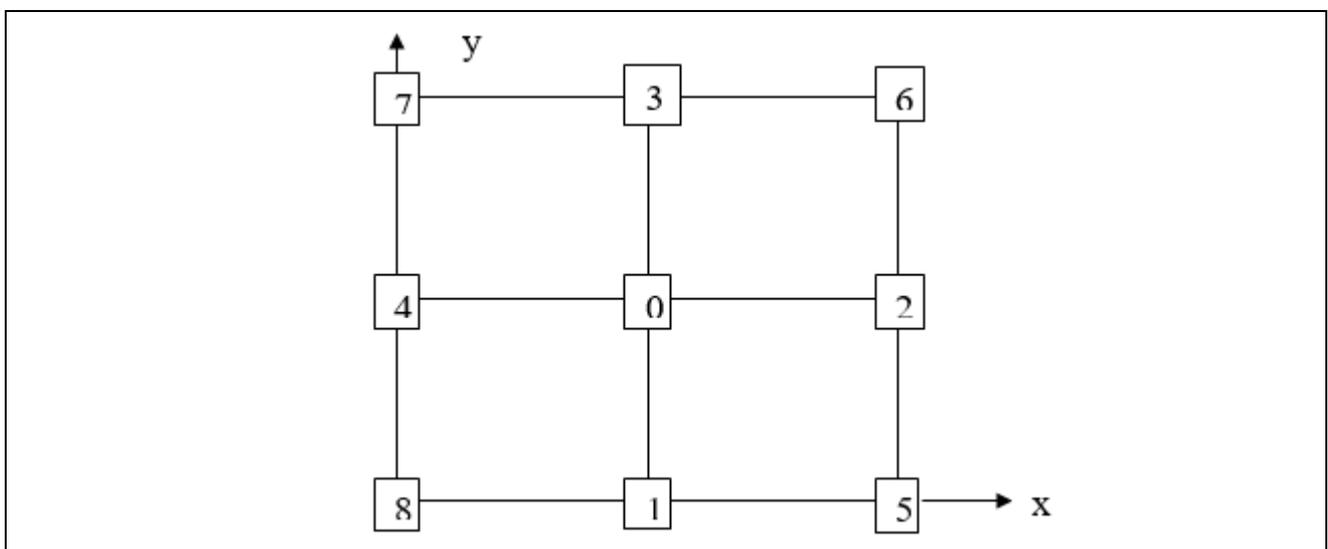


Рисунок 1. – Шаблон разностных схем для двумерной задачи

Для аппроксимации вторых производных используем стандартную консервативную схему контрольных объемов:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} &= h_x^{-2} \left[\sigma_{xx}^{02} (U_2 - U_0) - \sigma_{xx}^{04} (U_0 - U_4) \right] + O(h_x^2), \\ \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{yy} \frac{\partial u}{\partial y} &= h_y^{-2} \left[\sigma_{yy}^{03} (U_3 - U_0) - \sigma_{yy}^{01} (U_0 - U_1) \right] + O(h_y^2),\end{aligned}\tag{4}$$

где $\sigma_{xx}^{km} = (\sigma_{xx}^m + \sigma_{xx}^k) / 2$, $\sigma_{yy}^{km} = (\sigma_{yy}^m + \sigma_{yy}^k) / 2$, σ_{xx}^m , σ_{xx}^k – значения коэффициентов в точках шаблона с номерами m и k . Здесь и далее индексы указывают соотнесение значений сеточной функции с соответствующими узлами шаблона сетки, представленного на рисунке 1.

Схема (4) консервативна и имеет второй порядок аппроксимации, что обеспечивает сходимость в классе разрывных коэффициентов со скоростью порядка аппроксимации.

Для аппроксимации смешанных производных рассмотрим 3 варианта схем второго порядка:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{4h_y h_x} \left(\sigma_{xy}^{02} (U_6 - U_2) - \sigma_{xy}^{04} (U_3 - U_0) + \sigma_{xy}^{02} (U_0 - U_1) \right. \\ &\quad \left. - \sigma_{xy}^{04} (U_4 - U_8) + \sigma_{xy}^{02} (U_2 - U_5) - \sigma_{xy}^{04} (U_0 - U_1) + \right. \\ &\quad \left. + \sigma_{xy}^{02} (U_3 - U_0) - \sigma_{xy}^{04} (U_7 - U_4) \right) + O(h_x^2 + h_y^2),\end{aligned}\tag{0}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{4h_y h_x} \left(\sigma_{xy}^{+02} (U_6 - U_2) - \sigma_{xy}^{+04} (U_3 - U_0) + \sigma_{xy}^{+02} (U_0 - U_1) - \right. \\ &\quad \left. - \sigma_{xy}^{+04} (U_4 - U_8) + \sigma_{xy}^{-02} (U_2 - U_5) - \sigma_{xy}^{-04} (U_0 - U_1) + \right. \\ &\quad \left. + \sigma_{xy}^{-02} (U_3 - U_0) - \sigma_{xy}^{-04} (U_7 - U_4) \right) + O(h_x^2 + h_y^2),\end{aligned}\tag{I}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{4h_y h_x} \left(\sigma_{xy}^{02} (U_6 - U_5 + U_3 - U_1) - \right. \\ &\quad \left. - \sigma_{xy}^{04} (U_3 - U_1 + U_7 - U_8) \right) + O(h_x^2 + h_y^2),\end{aligned}\tag{II}$$

здесь $\sigma_{xy}^{\pm km} = \sigma_{xy}^{km} \pm \left| \sigma_{xy}^{km} \right|$.

Первые две схемы (0) и (I) рассматривались ранее в работах А.А.Самарского, В.И. Мажукина, П.П. Матуса, Г.И. Шишкина, И.В. Рыбак и используют 9-ти и 7-и точечные шаблоны соответственно. Схема (II) рассматривалась первоначально в работах [2, 3, 4], как новая, но, несмотря на различие подходов в построении схем (0) и (II), путем приведения подобных в схеме (0) несложно показать ее эквивалентность схеме (II).

В разделе 2.3 на основе численных экспериментов проведен сравнительный анализ точности разностных методов (I) и (II), для решения уравнений вида (1) в квадратной области

$$(x, y) \in D = \{(x, y), -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}, \quad u(x, y)|_{\Gamma} = 0, \quad (6)$$

с кусочно-постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} = \sigma_{yy} &= \begin{cases} 2, & \text{если } x \cdot y > 0, \\ 1, & \text{если } x \cdot y < 0, \end{cases} \\ \sigma_{xy} = \sigma_{yx} &= \begin{cases} -0.5, & \text{если } x \cdot y > 0, \\ 0.5, & \text{если } x \cdot y < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

Правая часть уравнения (1) выбрана в соответствие точному решению $u(x, y) = (\sin(\pi x) \cdot \sin(\pi y))^2$:

$$f(x, y) = \begin{cases} \pi^2 (2 \cos(2\pi x) + 2 \cos(2\pi y) - 4 \cos(2\pi x) \cdot \cos(2\pi y) - \\ - \sin(2\pi x) \cdot \sin(2\pi y)), & x \cdot y > 0; \\ \pi^2 (\cos(2\pi x) + \cos(2\pi y) - 2 \cos(2\pi x) \cdot \cos(2\pi y) + \\ + \sin(2\pi x) \cdot \sin(2\pi y)), & x \cdot y < 0. \end{cases} \quad (8)$$

Зависимость относительной погрешности $\delta = \|u - U\| / \|u\|$ от размерности сетки N представлена таблице 1. Использована Евклидова норма погрешности.

Таблица 1. – Зависимость относительной погрешности δ от размерности сетки

$N \times N$	41×41	81×81	121×121	161×161
δ_I	0.0100	0.0025	0.0011	0.0006
δ_{II}	0.0088	0.0022	0.0010	0.0006

Как следует из результатов, представленных в таблице 1, обе схемы имеют второй порядок точности. При этом заметно, что схема (II) незначительно превосходит схему (I) по точности примерно на 8-12%.

В *разделе 2.4* рассмотрены итерационные методы решения систем сеточных уравнений

$$Ax = f. \quad (9)$$

Приведены алгоритмы метода сопряженных (би-сопряженных) градиентов. Данный класс методов для реализации систем сеточных уравнений принято использовать с переобусловливателем.

В качестве переобусловливателей в данной главе были рассмотрены комбинированный переобусловливатель Фурье-Якоби и переобусловливатель на основе неполной LU-факторизации. Первый строился на основе комбинации переобусловливателя Якоби, в качестве которого используется главная диагональ матрицы системы, и переобусловливателя Фурье на основе матрицы Пуассона, отвечающей случаю однородной изотропной задачи. Для обращения матрицы Пуассона использован алгоритм быстрого дискретного преобразования Фурье.

В *разделе 2.5* проанализирован переобусловливатель неполной LU-факторизации (iLU). Показано, что изменение порогового параметра, регулирующего количество ненулевых элементов в треугольных компонентах, влияет на сжатие спектра переобусловленной матрицы, количество итераций, а также на время реализации отдельной итерации. При этом минимальные вычислительные затраты отмечены для случая, когда в треугольных компонентах сохраняются лишь те ненулевые позиции, которые присутствуют в исходной матрице системы.

В *разделе 2.6* показано, что помимо числа обусловленности, на количество итераций могут влиять и другие факторы, например, неравномерность распределения собственных значений матрицы (наличие кластеров, кратных собственных значений), амплитуда мнимой части комплексных собственных чисел и так далее. Для оценки существенности перечисленных факторов проанализирован ряд тестовых матриц с фиксированными границами спектра, для которых с ростом размерности число обусловленности остается неизменным, но изменяется неравномерность плотности распределения собственных значений на комплексной плоскости.

Рассмотрены три случая распределения комплексных собственных значений тестовых матрицы:

- 1) линейное распределение;

- 2) логарифмическое распределение;
- 3) кластерное распределение.

На основе численных экспериментов показано, что наиболее существенная зависимость скорости сходимости итераций наблюдается с увеличением размерности для кластерного типа распределения собственных значений тестовой матрицы, где заметнее всего изменяется неоднородность плотности распределения собственных значений. Аналогичный эффект наблюдается и с увеличением амплитуды мнимой части спектра при неоднородной плотности распределения собственных значений и фиксированных значениях числа обусловленности и размерности матрицы.

Проанализирована трансформация спектров переобусловленных матриц и скорость сходимости итераций для дискретной модели задачи о распределении потенциала в плоском квадратном проводнике с кольцевой анизотропной неоднородностью. Результаты показывают, что преимущества переобусловливателя Фурье–Якоби по сравнению с неполной LU факторизацией определяются на порядок лучшим сжатием спектра, как вдоль действительной, так и в направлении мнимой оси, а также более равномерным распределением собственных значений спектра переобусловленной матрицы. Кроме того, переобусловливатель Фурье – Якоби позволяет снизить (а в отдельных случаях практически устранить) зависимость числа итераций от шагов сетки благодаря более равномерному распределению собственных значений переобусловленной матрицы [3].

В **третьей главе** в *разделе 3.1* рассмотрена задача для уравнения (1) в кольцевой области $D = \{(x, y), R_1 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq R_2\}$, с границей Γ , на которой заданы условия Неймана

$$\left. \frac{du}{dn} \right|_{\Gamma} = 0. \quad (10)$$

Дополнение кольцевой области D до квадрата $D_0 \supset D$ со сторонами, незначительно превосходящими внешний радиус кольца, позволяет свести задачу Неймана о распределении потенциала в изолированном кольцевом проводнике к практически эквивалентной задаче Дирихле с однородными краевыми условиями на границе Γ_0 дополняющего квадрата D_0 :

$$D_0 = \{(x, y), -L \leq x \leq L, -L \leq y \leq L, L > R_2\} \quad (11)$$

$$u(x, y)|_{(x, y) \in \Gamma_0} = 0.$$

Относительно коэффициентов модифицированной задачи полагаем: $\sigma_{xx}(x, y) = \sigma_{yy}(x, y) = \sigma_0 \ll 1$, $\sigma_{xy}(x, y) = \sigma_{yx}(x, y) = 0$ и $f(x, y) \equiv 0$ при $(x, y) \in D_0 \setminus D$. Компоненты тензора проводимости в области D вычислялись исходя из постоянных значений тангенциальных и радиальных проводимостей кольцевого проводника σ_τ и σ_r ($\sigma_\tau > \sigma_r$) согласно (2), (3).

В *разделе 3.2* дается описание численного метода решения задачи (1), (11) на основе двух схем аппроксимации смешанных производных, рассмотренных ранее во второй главе.

В *разделе 3.3* приводятся результаты численных экспериментов. Были исследованы зависимости числа итераций от количества узлов сетки и величины малого параметра σ_0 , определяющего продолжение коэффициента проводимости в методе фиктивных областей. Кроме того, была проведена оценка эффективности рассмотренных ранее переобусловливателей по количеству итераций и суммарным вычислительным затратам, необходимым для решения задачи (рисунок 2).

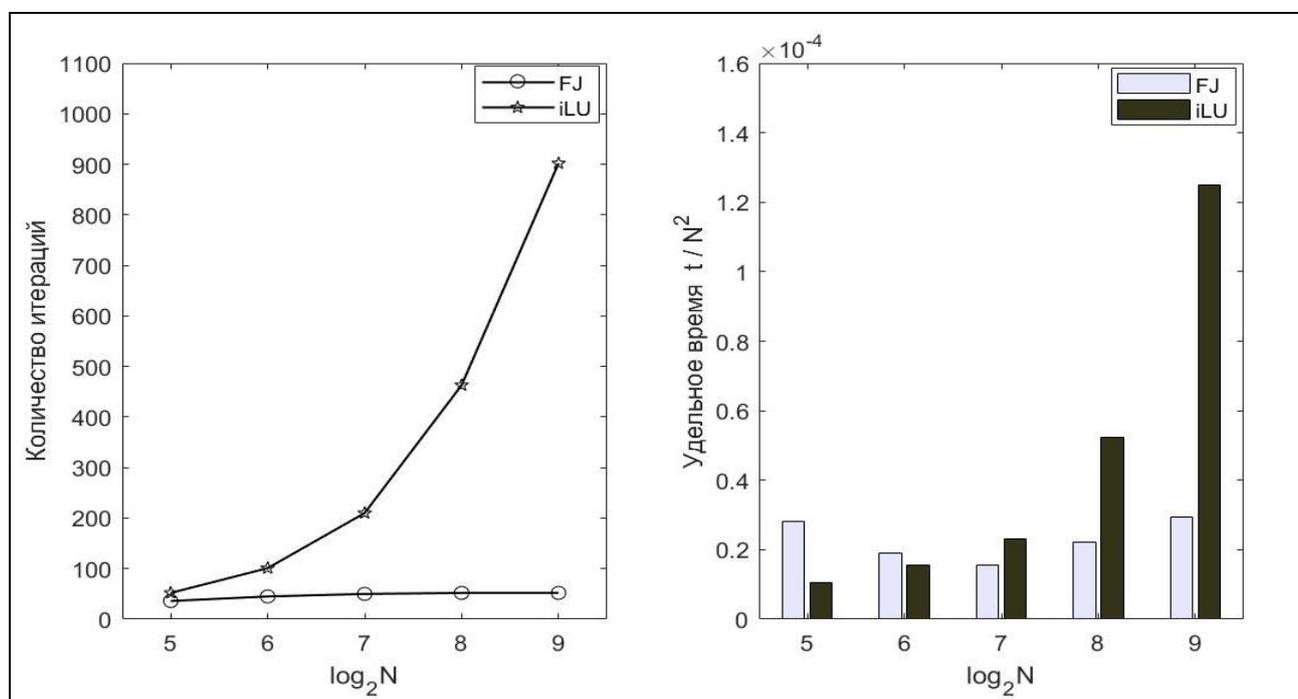


Рисунок 2. – Зависимости количества итераций метода BiCG с переобусловливателями FJ и iLU и удельного времени итерационной реализации систем сеточных уравнений для схемы (II) при решении задачи распределения потенциала в анизотропном изолированном проводнике методом фиктивных областей, $\sigma_\tau=4$, $\sigma_r=1$, $\sigma_0=10^{-8}$

Данные численных экспериментов показывают, что по количественным и качественным критериям лучшие показатели демонстрирует схема (II). В частности, только для этой схемы удается построить итерационный алгоритм на основе метода би-сопряженных градиентов с переобусловливателем Фурье-Якоби (BiCG FJ), при использовании которого устраняется рост числа итераций с уменьшением шага сетки, т.е. указанный тип переобусловливателя является спектрально оптимальным, и данная итерационная техника качественно сопоставима с многосеточными итерационными методами.

В 4 главе рассматривается трехмерное эллиптическое уравнение, описывающее решение прямой задачи электроимпедансной томографии (ЭИТ), а именно, нахождение распределения электрического потенциала на поверхности головы человека при заданных параметрах проводимости тканей, с учетом их анизотропии, и положения источников электрического поля.

В разделе 4.1 дана постановка задачи ЭИТ, которая описывается трехмерным анизотропным уравнением Пуассона,

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = f(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \Omega \quad (12)$$

с однородными условиями Неймана на границе, характеризующими нулевой поток на поверхности области Γ_Ω :

$$\sigma(\nabla u) \cdot n = 0, \quad (x, y, z) \in \Gamma_\Omega. \quad (13)$$

Здесь $u(x, y, z)$ – искомый потенциал, $\sigma = \sigma_{ij}(x, y, z)$ – неоднородный симметрический тензор, описывающий проводимость тканей головы.

Для решения задачи применялся метод фиктивных областей: исследуемое шарообразное тело Ω рассматривалось внутри куба $K \supset \Omega$. Проводимость среды между поверхностью области Γ_Ω и границей куба Γ_K полагалась очень низкой $\sigma = 10^{-12}$, поэтому такая изолирующая прослойка гарантировала выполнение условия (13) при нулевых условиях Дирихле на границе куба. Кроме того, использование метода фиктивных областей устраняет проблему неоднозначности решения краевой задачи для уравнения (12) с однородными условиями Неймана (13).

Для верификации численной модели была выбрана модель слоистой анизотропной сферы с кусочно-постоянной проводимостью в слоях, внутренние поверхности которых определялись сферами с общим центром и радиусами (в метрах): $R_1=0.084$; $R_2=0.065$; $R_3=0.05$; $R_4=0.03$. Каждый слой

сферы соотносился с определенной тканью головы человека (скальп, череп, церебральная жидкость, кора головного мозга и белое вещество соответственно), проводимости которых полагались равными $\sigma_1 = 0.44$; $\sigma_2 = 0.02$; $\sigma_3 = 1.8$; $\sigma_4 = 0.25$ См/м.

Второй снаружи слой, моделирующий череп, полагался анизотропным с отношением тангенциальной и радиальной проводимостей $\sigma_\tau / \sigma_R = 10:1$, что приблизительно отвечает реальным данным. В качестве источника потенциала был выбран дипольный источник на экваторе сферы.

Для численного решения задачи использовался метод конечных разностей на трехмерном 18-ти точечном шаблоне. Для аппроксимации смешанных производных были протестированы 5 вариантов схем, среди которых рассмотренные ранее схемы (I) и (II). Дискретизация исходного эллиптического уравнения приводила к системе ЛАУ с разреженной 19-ти диагональной матрицей большой размерности $N = N_x \cdot N_y \cdot N_z$. Для реализации системы сеточных уравнений использован итерационный метод би-сопряжённых градиентов с переобусловливателями Фурье-Якоби.

В *разделе 4.2* представлены результаты сравнений приближенного аналитического решения, полученного в работе D. J. de Munck «A fast method to compute the potential in the multisphere model» (1992), с приближенными численными решениями, показывающими корректность численных результатов. Также проведено сравнение эффективности итерационной реализации пяти рассмотренных схем. Наиболее приемлемые результаты были получены при аппроксимации смешанных производных по схеме вида (II). В этом случае использование переобусловливателя Фурье-Якоби позволило минимизировать вычислительные затраты и устранить зависимость количества итераций от шага сетки.

В *разделе 4.3* были исследованы зависимости количества итераций от соотношения тангенциальной и радиальной проводимостей тканей черепа при $\sigma_{2\tau} / \sigma_{2R} = 1:1; 10:1; 50:1$. По результатам численных экспериментов переобусловливатель на основе неполной LU-факторизации обеспечивает большую стабильность по отношению к росту числа итераций с увеличением параметра анизотропии. Но даже при сильной анизотропии на достаточно подробных сетках данный переобусловливатель не превосходит в эффективности переобусловливателя Фурье-Якоби.

В *разделе 4.4* приведены результаты численного моделирования прямой задачи электроимпендансной томографии с использованием геометрии и

структуры тканей, полученной на основе МРТ исследований головы реального пациента [1].

Для выяснения предельных возможностей методики была рассмотрена задача ЭИТ, с входными данными реального пациента, имеющего внедренный в череп металлический имплант, проводимостью $2,5 \cdot 10^6$ См/м, что на 6-7 порядков превосходит естественную проводимость тканей головы. Численные эксперименты показывают, что заметное влияние импланта на сигналы регистрируемой электроэнцефалограммы наблюдается лишь в близости от их источника.

Проведены также численные оценки влияния анизотропии белого вещества мозга на решение задачи ЭИТ. Влияние анизотропии белого вещества хорошо заметно при сравнении величины потенциала в фиксированных точках на поверхности головы как вблизи дипольного источника, так и на удалении от него. Отличия в амплитуде потенциала между изотропным и анизотропным случаями превышают 20%. Таким образом, анизотропная модель белого вещества при решении задач ЭИТ позволяет получить более адекватную картину распределения потенциала, регистрируемого в многоканальных электроэнцефалограммах [1].

Принимая во внимание то, что именно измерения потенциала на поверхности головы является основным источником информации об электрической активности мозга, представленные результаты численного моделирования показывают, насколько сильно влияет учет анизотропии белого вещества на корректность решения как прямой, так и обратной задачи ЭИТ.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации

1. Результаты сравнительного анализа разностных схем для задач анизотропной проводимости слоистых сред, позволившие выявить влияние схемы аппроксимации смешанных производных на эффективность итерационной реализации соответствующей дискретной модели. На основе проведенного анализа определена наиболее адекватная схема, демонстрирующая лучшие вычислительные качества при использовании для ее реализации итерационного метода би-сопряженных градиентов с переобусловливателем Фурье-Якоби [1, 2, 7-10, 14, 16].

2. Численные оценки спектральных характеристик исходной и переобусловленной матриц в задачах анизотропной проводимости и оценки

зависимости скорости сходимости итераций от размерности сетки, коэффициента анизотропии и диапазона изменения коэффициентов задачи. Данные оценки позволяют сделать вывод о спектральной оптимальности переобусловливателя Фурье-Якоби, который практически устраняет зависимость числа итераций для достижения заданной точности от размера шага сетки [1, 2, 4, 5, 10-13].

3. Численная методика решения многомерных эллиптических уравнений со смешанными производными и сильно неоднородными разрывными коэффициентами, основанная на определенном способе аппроксимации смешанных производных и реализации системы сеточных уравнений итерационным методом би-сопряженных градиентов с переобусловливателем Фурье-Якоби [1, 2, 4, 6].

4. Обобщение разработанной методики на случай произвольной геометрии задачи с использованием метода фиктивных областей без существенной деградации ее вычислительных качеств за счет естественного ухудшения обусловленности дискретной модели при введении малого параметра для продолжения коэффициентов задачи в дополняющую подобласть [1, 3, 15].

5. Оценки влияния анизотропии проводимости белого вещества и металлических имплантов на результаты многоканальной электроэнцефалографии, полученные методом численного моделирования на основе разработанной методики [1, 10].

Рекомендации по практическому использованию результатов

Полученные результаты имеют широкую перспективу применения для решения задач электроимпедансной томографии анизотропных слоистых сред и в других приложениях, математические модели которых приводят к многомерным эллиптическим уравнениям со смешанными производными и существенно неоднородными разрывными коэффициентами.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ

Статьи в научных изданиях в соответствии с п. 18 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь

1. A 3D Finite-Difference BiCG Iterative Solver with the Fourier-Jacobi Preconditioner for the Anisotropic EIT/EEG forward problem [Electronic resource] / S. Turovets, V. Volkov, A. Zherdetsky, A. Prakonina, A. Malony // Computational and Mathematical Methods in Medicine. – 2014. – Vol. 2014. – Mode of access: <https://www.hindawi.com/journals/cmmm/2014/426902/> . – Date of access: 12.01.2014.

2. Волков, В. М. Разностные схемы и итерационные методы для многомерных эллиптических уравнений со смешанными производными / В. М. Волков, Е. В. Проконина // Вес. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.- мат. навук. – 2018. – Т. 54, № 4. – С. 454–459.

3. Волков, В. М. Итерационная реализация разностных схем в методе фиктивных областей для эллиптических задач со смешанными производными / В. М. Волков, Е. В. Проконина // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. – 2019. – № 1. – С. 69-76.

4. Проконина, Е. В. Спектральные свойства дискретных моделей многомерных эллиптических задач со смешанными производными / Е. В. Проконина // Вес. Нац. Акад. Навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2019. – Т.55, №2. – С. 207-215.

Статьи в других научных изданиях

5. Проконина, Е. В. Спектрально-оптимальный переобуславливатель для итерационных методов решения многомерных задач электроимпедансной томографии анизотропных сред / Е.В. Проконина, В.М. Волков // Сборник научных работ студентов Республики Беларусь «НИРС 2013» / Редкол.: А.И. Жук (пред.) [и др.]. – Мн.: Изд. центр БГУ, 2014. – С. 48-49.

Статьи в сборниках материалов научных конференций

6. Волков, В.М. Об одном разностном методе для задач анизотропной диффузии с разрывными коэффициентами / В. М. Волков, Е. В. Проконина, С.И. Туровец // Математические методы в технике и технологиях: сб. тр.

междунар. науч. конф., Минск, 10-12 октября 2017 г.: в 12 т. / под общ. ред. А. А. Большакова. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2017. – Т.12, ч.1. – С. 14-18.

Тезисы докладов

7. Численное моделирование в задачах электроимпедансной томографии анизотропных сред / В. М. Волков, А. А. Жердецкий, Е. В. Проконина, С. И. Туровец // XI Белорусская математическая конференция: тез. докл. междунар. науч. конф., Минск, 4-9 ноября 2012 г. / Институт математики НАН Беларуси. – Минск, 2012. – Ч.3. – С.35-36.

8. Видякина, Е. В. Разностные схемы и итерационные методы решения многомерных уравнений Пуассона со смешанными производными / Е. В. Видякина, Е. В. Проконина // Веб-программирование и Интернет-технологии WebConf2012: материалы 2-й Междунар. науч.-практич. конф., Минск, 5–7 июня 2012 г. / Белорус. гос. ун-т. – Минск, 2012. – С. 147.

9. Проконина, Е. В. Разностные схемы и итерационные методы для решения трёхмерных эллиптических задач со смешанными производными / Е. В. Проконина // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях: материалы XVII Респ. науч. конф. студентов и аспирантов, Гомель, 24-26 марта 2014 г. / ГГУ им. Ф. Скорины. – Гомель, 2014. – С.27-28.

10. Finite-difference iterative solver with spectrally equivalent preconditioner for anisotropic electrical impedance tomography problems / V. M. Volkov, A. V. Prakonina, S. I. Turovets, A. D. Malony // Еругинские чтения-2014: материалы XVI Междунар. науч. конф. по дифференциальным уравнениям, Новополоцк, 20-22 мая 2014 / Полоцкий гос. ун-т. – Новополоцк, 2014. – Ч.2. – С. 85-86.

11. Волков, В. М. Методы численного моделирования анизотропной диффузии слоистых сред / В. М. Волков, Е. В. Проконина // Математические и физические методы исследований: научный и методический аспекты: сб. материалов Респ. науч.-практ. конф., посвящ. 85-летию лауреата Нобелевской премии Ж.И. Алферова, Брест, 16-17 апр. 2015 г. / БрГУ им. А.С. Пушкина. – Брест, 2015. – С. 21-24.

12. Проконина, Е. В. Разностные схемы и итерационные методы для стационарных многомерных задач анизотропной диффузии/ Е. В. Проконина // Веб-программирование и Интернет-технологии WebConf2015: материалы 3-й Междунар. науч.-практич. конф., Минск, 12–14 мая 2015 г. / Белорус. гос. ун-т. – Минск, 2015. – С. 103-104.

13. Проконина, Е. В. Итерационные методы реализации разностных схем для трехмерных эллиптических задач со смешанными производными / Е. В. Проконина // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика: сб. науч. тр. по матер. междунар. заоч. науч.-практ. конф. «Молодежный форум: технические и математические науки», Воронеж, 9-12 ноября 2015 г. / ФГБОУ ВО «Воронежский гос. лесотехнич. ун-т им. Г.Ф. Морозова» (ВГЛТУ). – Воронеж, 2015. – № 8, ч.4. (19-4). – С. 233-236.

14. Волков, В.М. Разностные схемы и итерационные методы для многомерных эллиптических задач анизотропной диффузии / В. М. Волков, Е. В. Проконина // XII Белорусская математическая конференция: мат. междунар. науч. конф., Минск, 5-10 сентября 2016 г. / Институт математики НАН Беларуси. – Минск, 2016. – Ч.3. – С. 36-37.

15. Волков, В. М. Разностные схемы и итерационные методы для многомерных эллиптических уравнений со смешанными производными / В. М. Волков, Е. В. Проконина // Вычислительные методы, модели и образовательные технологии: сб. мат. VI междунар. науч.-практ. конф., Брест, 19 октября 2017 г. / БрГУ им. А.С. Пушкина.; ред. О. В. Матысик. – Брест, 2017. – С. 4-6.

16. Волков, В. М. Принцип максимума в контексте итерационной реализации разностных схем для многомерных задач анизотропной диффузии / В. М. Волков, Е. В. Проконина // Веб-программирование и Интернет-технологии WebConf2018: тез. докл. 4-й Междунар. науч.-практич. конф., Минск, 14–18 мая 2018 г. / Белорус. гос. ун-т. – Минск, 2018. – С. 98-99.

Проконина Елена Владимировна

Разностные схемы и итерационные методы для трёхмерных эллиптических уравнений со смешанными производными

Ключевые слова: разностные схемы, итерационные методы, эллиптические уравнения, смешанные производные, переобусловливатели.

Цель работы: построение эффективных разностных методов и итерационных алгоритмов их реализации для многомерных эллиптических уравнений со смешанными производными, применительно к численному анализу задач электроимпедансной томографии анизотропных сред.

Методы исследования: методы теории разностных схем, сравнительный анализ и численный эксперимент.

Полученные результаты и их новизна. В диссертационной работе получены следующие новые результаты:

1. Зависимость скорости сходимости итерационного метода би-сопряженных градиентов с различными типами переобусловливателей от выбора схемы аппроксимации смешанных производных при решении многомерных задач анизотропной диффузии.

2. Численные оценки эффективности сжатия спектров разностных операторов анизотропной диффузии при использовании различных схем аппроксимации смешанных производных и различных типов переобусловливателей;

3. Численная методика решения многомерных задач электроимпедансной томографии анизотропных сред на основе разностной схемы и итерационного метода би-сопряженных градиентов с переобусловливателем Фурье – Якоби, которая по результатам численных экспериментов превосходит известные аналоги;

4. Численные оценки влияния фактора анизотропии проводимости биологических тканей и металлических имплантов на пространственное распределение потенциала в задачах электроимпедансной томографии, полученные с использованием разработанной методики.

Рекомендации по использованию. Полученные результаты могут быть использованы для решения задач электроимпедансной томографии анизотропных слоистых сред и в других приложениях, математические модели которых приводят к многомерным эллиптическим уравнениям со смешанными производными и существенно неоднородными разрывными коэффициентами.

Область применения. Область применения охватывает круг инженерно-физических задач, которые описываются многомерными эллиптическими уравнениями со смешанными производными и существенно неоднородными разрывными коэффициентами.

РЭЗЮМЭ

Праконіна Алена Уладзіміраўна

Рознасныя схемы і ітэрацыйныя метады для трохмерных эліптычных ураўненняў са змешанымі вытворнымі

Ключавыя словы: рознасныя схемы, ітэрацыйныя метады, эліптычныя ўраўненні, змешаныя вытворныя, пераабумоўленік.

Мэта працы: пабудова эфектыўных рознасных метадаў і ітэрацыйных алгарытмаў іх рэалізацыі для шматмерных эліптычных ураўненняў са змешанымі вытворнымі ў дачыненні да лікавага аналізу задач электраімпеданснай тамаграфіі анізатропных асяроддзяў.

Метады даследавання: метады тэорыі рознасных схем, параўнальны аналіз і колькасны эксперымент.

Атрыманыя вынікі і іх навізна. У дысертацыйнай працы атрыманы наступная новыя вынікі:

1. Залежнасць хуткасці збежнасці ітэрацыйнага метаду бі-спалучаных градыентаў з рознымі тыпамі пераабумоўленікаў ад выбару схемы апраксімацыі змешаных вытворных пры вырашэнні шматмерных задач анізатропнай дыфузіі;

2. Лікавыя ацэнкі эфектыўнасці сціску спектраў рознасных аператараў анізатропнай дыфузіі пры выкарыстанні розных схем апраксімацыі змешаных вытворных і розных тыпаў пераабумоўленікаў;

3. Лікавая методыка рашэння шматмерных задач электраімпеданснай тамаграфіі анізатропных асяроддзяў на аснове рознаснай схемы і ітэрацыйнага метаду бі-спалучаных градыентаў з пераабумоўленікам Фур'е-Якобі, якая па выніках лікавых эксперыментаў пераўзыходзіць вядомага аналагі;

4. Лікавыя ацэнкі ўплыву фактару анізатрапіі праводнасці біялагічных тканін і металічных імплантаў на прасторавае размеркаванне патэнцыялу ў задачах электраімпеданснай тамаграфіі, атрыманыя з выкарыстаннем распрацаванай методыкі.

Рэкамендацыі па выкарыстанні. Атрыманыя вынікі могуць быць выкарыстаны для рашэння задач электраімпеданснай тамаграфіі анізатропных

слаістых асяроддзяў і ў іншых дадатках, матэматычныя мадэлі якіх прыводзяць да шматмерных эліптычных ураўненняў са змешанымі вытворнымі і істотна неаднароднымі разрыўнымі каэфіцыентамі.

Вобласць прымянення. Вобласць прымянення ахоплівае кола інжыерна-фізічных задач, якія апісваюцца шматмернымі эліптычнымі ўраўненнямі са змешанымі вытворнымі і разрыўнымі каэфіцыентамі.

SUMMARY

Prakonina Alena Yladzimirayna

Finite difference schemes and iterative methods for three-dimensional elliptic equations with mixed derivatives

Key words: finite difference schemes, iterative methods, elliptic equations, mixed derivatives, preconditioners.

The goal of the thesis: the construction of effective difference methods and iterative algorithms for their implementation for multidimensional elliptic equations with mixed derivatives, applied to the numerical analysis of electrical impedance tomography problems for anisotropic media.

Methods of research: methods of the theory of finite difference schemes, comparative analysis and numerical experiment.

The obtained results and their novelty. The following new results have been obtained in the thesis:

1. The dependence of the convergence rate of the bi-conjugate gradients iterative method with different types of preconditioners on the choice of the scheme for approximating mixed derivatives in solving multidimensional problems of anisotropic diffusion was established;

2. Numerical estimates of the efficiency of the compression of the spectra of difference operators of anisotropic diffusion using various schemes for approximating mixed derivatives and various types of preconditioners;

3. A numerical technique for solving multidimensional problems of electrical impedance tomography of anisotropic media based on a difference scheme and an iterative method of bi-conjugate gradients with a Fourier-Jacobi preconditioner, which, according to the results of numerical experiments, surpasses the known analogues;

4. Numerical estimates of the influence of the anisotropy factor of biological tissues conductivity and metal implants on the spatial distribution of potential in the

problems of electrical impedance tomography, obtained using the developed technique.

Recommendations for the usage. The obtained results can be used to solve the problems of electrical impedance tomography of anisotropic layered media and in other applications, which mathematical models lead to multidimensional elliptic equations with mixed derivatives and substantially inhomogeneous discontinuous coefficients.

The degree of the usage and applications. The application scope covers the range of engineering and physical problems, described by multidimensional elliptic equations with mixed derivatives and discontinuous coefficients.