Актуальные проблемы науки и естествознания

УДК 519.1

А.Н. Исаченко, Я.А. Исаченко, А.М. Ревякин

О периметрах и окружениях для матроида

Вводятся новые понятия для матроида (H-периметр, L-периметр, H-окружение, L-окружение), приводится аксиоматизация матроида на их основе. Рассматриваются соответствующие оракулы, показана полиномиальная сводимость к ним оракулов, определенных для основных понятий матроида.

Ключевые слова: матроид, оракул, полиномиальная сводимость.

Аксиоматизация матроида может проводиться на основе различных понятий: независимого множества, базиса, цикла, функции ранга, остовного множества, оператора замыкания, плоскости, гиперплоскости, функции периметра, циклического множества, функции окружения [1—3]. Учитывая двойственные соотношения, матроид можно определить также в терминах конезависимых множеств, кобазисов, коциклов и т. д. Свойства указанных понятий матроида приведены в работах [4—6].

Пусть (S, F) — матроид, заданный на множестве S семейством независимых подмножеств F. H-периметром матроида (S, F) назовем функцию $\gamma_H{:}2^S\to\{0, \ldots, |S|\}$ со значениями $\gamma_H(A) = \max\{|C| : C \subseteq A,\ C$ — цикл$\}$, если A — зависимое множество, и $\gamma_H(A) = 0$, если $A \in F$.

Теорема 1 (аксиомы H-периметра). Функция $\gamma_H{:}2^S\to\{0, \ldots, |S|\}$ является функцией H-периметра некоторого матроида (S, F) тогда и только тогда, когда для нее выполняются условия:

- $H1)$ если $\gamma_H(X) > 0$, то существует множество $Y \subseteq X$, для которого $\gamma_H(X) = \gamma_H(Y) = |Y|$;
- $H2)$ если $X \supseteq Y$, то $\gamma_H(X) \geq \gamma_H(Y)$;
- $H3)$ если $\gamma_H(X) = |X|$, то $\gamma_H(X \setminus x) = 0$ для любого $x \in X$;
- $H4)$ если $\gamma_H(X) = |X|$, $\gamma_H(Y) = |Y|$, $X \neq Y$, $x \in X \cap Y$, то $\gamma_H((X \cup Y) \setminus x) > 0$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть (S, F) — матроид, и функция $\gamma_H{:}2^S\to\{0, \ldots, |S|\}$ является его H-периметром. Выполнение условия $H1)$ следует непосредственно из определения функции γ_H. Рассмотрим условие $H2)$. Предположим, что $X \supseteq Y$. Пусть C — цикл матроида (S, F), причем $C \subseteq Y$ и $\gamma_H(Y) = |C|$. Получим $X \supseteq Y \supseteq C$, следовательно, $\gamma_H(X) \geq |C| = \gamma_H(Y)$.

Равенство $\gamma_H(X) = |X|$ означает, что X является циклом матроида (S, F). Следовательно, $X \setminus x \in F$ для любого $x \in X$, что влечет $\gamma_H(X \setminus x) = 0$.

Если $\gamma_H(X) = |X|$, $\gamma_H(Y) = |Y|$, то X и Y — циклы матроида (S, F). Следовательно, по аксиомам циклов при $X \neq Y$, $x \in X \cap Y$, существует цикл C такой, что $C \subseteq (X \cup Y) \setminus x$, то есть $\gamma_H((X \cup Y) \setminus x) \geq |C| > 0$.

Достаточность. Пусть S — конечное множество, а $\gamma_H{:}2^S \to \{0, \ldots, |S|\}$ — функция, удовлетворяющая условиям $H1)$—$H4)$. Определим семейство подмножеств $\vartheta = \{X \mid X \in 2^S,\ \gamma_H(X) = |X|\}$ множества S. Пусть $X \in \vartheta$. Возьмем любое непустое собственное подмножество Y множества X и предположим, что $Y \in \vartheta$. Тогда $\gamma_H(Y) = |Y|$ и $Y \subseteq X \setminus x$ для некоторого $x \in X$. По условию $H2)$ получим $\gamma_H(X \setminus x) \geq \gamma_H(Y) = |Y| > 0$, что противоречит условию $H3)$. Таким образом, $C1)$ если X, Y — различные подмножества из ϑ, то $Y \not\subset X$. Выполнение условия $H4)$ означает, что $C2)$ если $X, Y \in \vartheta$ и $x \in X \cap Y$, то существует $Z \in \vartheta$ такое, что $Z \subseteq (X \cup Y) \setminus x$.

Условия $C1)$, $C2)$ являются аксиомами циклов матроида. Следовательно, ϑ — множество циклов некоторого матроида (S, F), что и доказывает достаточность.

L-периметром матроида (S, F) назовем функцию $\gamma_L{:}2^S \to \{0, \ldots, |S|\}$ со значениями $\gamma_L(A) = \min\{|C| : C \subseteq A,\ C \text{ — цикл}\}$, если A — зависимое множество, и $\gamma_L(A) = 0$, если $A \in F$. По аналогии с доказательством теоремы 1 получим справедливость следующей теоремы.

Теорема 2 (аксиомы L-периметра). Функция $\gamma_L{:}2^S \to \{0, \ldots, |S|\}$ является функцией L-периметра некоторого матроида (S, F) тогда и только тогда, когда для нее выполняются условия:

$L1)$ если $\gamma_L(X) > 0$, то существует множество $Y \subseteq X$, для которого $\gamma_L(X) = \gamma_L(Y) = |Y|$;

$L2)$ если $X \supseteq Y$, то $\gamma_L(X) \leq \gamma_L(Y)$;

$L3)$ если $\gamma_L(X) = |X|$, то $\gamma_L(X \setminus x) = 0$ для любого $x \in X$;

$L4)$ если $\gamma_L(X) = |X|$, $\gamma_L(Y) = |Y|$, $X \neq Y$, $x \in X \cap Y$, то $\gamma_L((X \cup Y) \setminus x) > 0$.

L-окружением матроида (S, F) назовем функцию $\varphi_L{:}2^S \to \{1, \ldots, |S|, \infty\}$, задаваемую равенствами $\varphi_L(A) = \min\{|L| : A \subseteq L,\ L \text{ — гиперплоскость}\}$, если ранг A меньше ранга S, и $\varphi_L(A) = \infty$ в противном случае.

Теорема 3. Функция $\varphi_L{:}2^S \to \{1, \ldots, |S|, \infty\}$ является L-окружением некоторого матроида (S, F) тогда и только тогда, когда для нее выполняются условия:

$\Psi_L 1)$ если $\varphi_L(X) < \infty$, то существует множество $Y \supseteq X$, для которого $\varphi_L(X) = \varphi_L(Y) = |Y|$;

$\Psi_L 2)$ если $X \supseteq Y$, то $\varphi_L(X) \geq \varphi_L(Y)$;

$\Psi_L 3)$ если $\varphi_L(X) = |X| < \infty$, то $\varphi_L(X \cup x) = \infty$ для любого $x \in S \setminus X$;

$\Psi_L 4)$ если $\varphi_L(X) = |X|$, $\varphi_L(Y) = |Y|$, $X \neq Y$, $x \notin X \cup Y$, то $\varphi_L((X \cap Y) \cup x) < \infty$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть (S, F) — матроид, и функция $\varphi_L{:}2^S \to \{1, \ldots, |S|, \infty\}$ является его L-окружением. Выполнение условия $\Psi_L 1)$ следует непосредственно из определения функции φ_L.

Рассмотрим условие $\Psi_L 2)$. Предположим, что $X \supseteq Y$. Пусть L — гиперплоскость матроида (S, F), причем $X \subseteq L$ и $\varphi_L(X) = |L|$. Получим $L \supseteq X \supseteq Y$, следовательно, $\varphi_L(X) = |L| \geq \varphi_L(Y)$.

Равенство $\varphi_L(X) = |X|$ означает, что X является гиперплоскостью матроида (S, F). Следовательно, ранг $\rho(X \cup x) = \rho(S)$ для любого $x \in S \setminus X$, что влечет $\varphi_L(X \cup x) = \infty$.

Если $\varphi_L(X) = |X|$, $\varphi_L(Y) = |Y|$, то X и Y являются гиперплоскостями матроида (S, F). Следовательно, по аксиомам гиперплоскостей при $X \neq Y$, $x \notin X \cup Y$ существует гиперплоскость L такая, что $L \supseteq (X \cap Y) \cup x$, то есть $\varphi_L((X \cap Y) \cup x) < \infty$.

Достаточность. Пусть S — конечное множество, а

$$\varphi_L : 2^S \to \{1, \ldots, |S|, \infty\} \text{ —}$$

функция, удовлетворяющая условиям $\Psi_L 1)$—$\Psi_L 4)$. Определим семейство подмножеств $H = \{X \mid X \in 2^S, \varphi_L(X) = |X|\}$ множества S. Пусть $X \in H$. Возьмем любое $Y \subset X$ и предположим, что $Y \in H$. Тогда $\varphi_L(Y) = |Y|$ и $Y \subseteq X \setminus x$ для некоторого $x \in X$. По условию $\Psi_L 2)$ получим $\varphi_L(Y \cup x) \leq \varphi_L(X) = |X| < \infty$, что противоречит условию $\Psi_L 3)$. Таким образом, $P1)$ если X, Y — различные подмножества из H, то $Y \not\subset X$. Выполнение условия $\Psi_L 4)$ означает, что $P2)$ если $X, Y \in H$, $X \neq Y$ и $x \notin X \cup Y$, то существует $Z \in H$ такое, что $Z \supseteq (X \cap Y) \cup x$.

Условия $P1)$, $P2)$ являются аксиомами гиперплоскостей матроида. Следовательно, H — множество гиперплоскостей некоторого матроида (S, F), что и доказывает достаточность.

H-окружением матроида (S, F) назовем функцию $\varphi_H : 2^S \to \{1, \ldots, |S|, \infty\}$, задаваемую равенствами $\varphi_H(A) = \max\{|L| : A \subseteq L, L \text{ — гиперплоскость}\}$, если ранг A меньше ранга S, и $\varphi_H(A) = \infty$ в противном случае. По аналогии с доказательством теоремы 3 получим справедливость следующей теоремы.

Теорема 4. Функция $\varphi_H : 2^S \to \{1, \ldots, |S|, \infty\}$ является H-окружением некоторого матроида (S, F) тогда и только тогда, когда для нее выполняются условия:

$\Psi_H 1)$ если $\varphi_H(X) < \infty$, то существует множество $Y \supseteq X$, для которого $\varphi_H(X) = \varphi_H(Y) = |Y|$;

$\Psi_H 2)$ если $X \supseteq Y$, то $\varphi_H(X) \leq \varphi_H(Y)$;

$\Psi_H 3)$ если $\varphi_H(X) = |X| < \infty$, то $\varphi_H(X \cup x) = \infty$ для любого $x \in S \setminus X$;

$\Psi_H 4)$ если $\varphi_H(X) = |X|$, $\varphi_H(Y) = |Y|$, $X \neq Y$, $x \in X \cup Y$, то $\varphi_H((X \cap Y) \cup x) < \infty$.

H-периметр, L-периметр, H-окружение и L-окружение двойственного к (S, F) матроида (S, F^*) назовем соответственно H-копериметром, L-копериметром, H-коокружением, L-коокружением и обозначим γ_H^*, γ_L^*, φ_H^*, φ_L^*. Получим для любого $X \notin F$:

$$\gamma_H(X) = |S| - \varphi_L^*(S \setminus X),\ \gamma_L(X) = |S| - \varphi_H^*(S \setminus X). \tag{1}$$

Если $\rho(X) < \rho(S)$, то

$$\varphi_H(X) = |S| - \gamma_L^*(S \setminus X),\ \varphi_L(X) = |S| - \gamma_H^*(S \setminus X). \tag{2}$$

Для каждого из приведенных понятий можно определить соответствующий оракул ***u*** как инъективное отображение

$$W_u:(2^S, \mu(S)) \to E(u).$$

Здесь $\mu(S)$ — совокупность всех матроидов на множестве S,

$$E(u) = \{0, \ldots, |S|\}$$

для H-периметра, H-копериметра, L-периметра, L-копериметра,

$$E(u) = \{1, \ldots, |S|, \infty\}$$

для H-окружения, H-коокружения, L-окружения, L-коокружения.

В силу (1)—(2) оракул H-периметр полиномиально сводим к оракулу L-коокружение, оракул L-периметр — к оракулу H-коокружение, оракул H-окружение — к оракулу L-копериметр и оракул L-окружение — к оракулу H-копериметр.

Рассмотрим вопрос о полиномиальной сводимости к введенным оракулам оракулов, соответствующих различным аксиоматизациям матроида [4—6].

Теорема 5. Оракулы независимое, конезависимое, базис, кобазис, цикл, коцикл, циклическое, коциклическое, плоскость, коплоскость, гиперплоскость, когиперплоскость, замыкание, козамыкание, остовное, коостовное полиномиально сводимы к оракулам H-периметр, L-периметр, H-окружение, L-окружение, L-коокружение, H-коокружение, L-копериметр.

Доказательство. Как следует из результатов работ [5; 6], достаточно рассмотреть полиномиальную сводимость оракула ранг к оракулам H-периметр, L-периметр и оракула остовное к оракулам H-окружение, L-окружение.

Рассмотрим оракул ранг. Пусть $X \subseteq S$. Для определения ранга $\rho(X)$ с использованием оракула H-периметр возьмем сужение матроида (S, F) на множество $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. Модифицируем «жадный» алгоритм поиска максимального независимого множества, заменив в нем оракул независимое на оракул H-периметр:

1. $I_0 = \varnothing$, $i = 0$.

2. $I_{i+1} := \begin{cases} I_i \cup x_{i+1}, \text{ если } \gamma_H(I_i \cup x_{i+1}) = 0, \\ I_i \text{ в противном случае.} \end{cases}$

3. $i := i + 1$. Если $i = k$, то стоп, иначе идти к 2.

В результате максимум за $k \le n$ обращений к оракулу получим ранг $\rho(X) = |I_k|$.

Заменив на шаге 2 γ_H на γ_L, получим полиномиальную сводимость оракула ранг к оракулу L-периметр.

Рассмотрим оракул остовное. Исходя из определения, $X \subseteq S$ является остовным множеством тогда и только тогда, когда $\rho(X) = \rho(S)$, или эквивалентно тогда и только тогда, когда $\varphi_H(X) = \infty$ ($\varphi_L(X) = \infty$), то есть за одно обращение к оракулу H-окружение или к оракулу L-окружение получим значение оракула остовное. Таким образом, теорема 5 доказана.

Литература

1. *Welsh D.J.A.* Matroid Theory. London: Academic Press, 1976.
2. *Ревякин А.М.* Матроиды: криптоморфные системы аксиом и жесткость ферм // Вестник МГАДА. Сер. «Философские, социальные и естественные науки». 2010. № 5. С. 96—106.
3. *Oxley J.G.* Matroid Theory. N.Y.: Oxford University Press, 1992, 2006.
4. *Robinson G.C., Welsh D.J.A.* The Computational Complexity of Matroid Algorithms // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1980. Vol. 87. P. 29—45.
5. *Исаченко А.Н.* Полиномиальная сводимость матроидных оракулов // Известия АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1984. № 6. С. 33—36.
6. *Исаченко А.Н., Ревякин А.М.* О сводимости матроидных оракулов // Вестник МГАДА. Сер. «Философские, социальные и естественные науки». 2011. № 3. С. 117—127.

Some new matroid notions (H-perimeter, L-perimeter, H-surrounding, L-surrounding) are given and a characterization for matroids on basis of them is provided. The corresponding oracles and present results about polynomial time reducibility of oracles are considered.

Keywords: matroid, oracle, polynomial time reducibility.