

Белорусский государственный университет

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе и
образовательным инновациям

О.Н. Здрок

«30» _____ 2020 г.

Регистрационный № УД- 9356 /уч.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ АЛГЕБРЫ

**Учебная программа учреждения высшего образования
по учебной дисциплине для специальности:**

1-31 03 01 Математика (по направлениям)

Направление специальности:

1-31 03 01-01 Математика (научно-производственная деятельность)

2020 г.

Учебная программа составлена на основе образовательного стандарта ОСВО 1-31 03 01-2013, утвержденного 30.08.2013, и учебного плана G31-140/уч., утвержденного 30.05.2013.

СОСТАВИТЕЛИ:

Беняш-Кривец Валерий Вацлавович – заведующий кафедрой высшей алгебры и защиты информации механико-математического университета Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор

РЕЦЕНЗЕНТ:

Говорушко Игорь Олегович, научный сотрудник отдела алгебры Института математики Национальной Академии Наук Республики Беларуси, кандидат физико-математических наук.

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой высшей алгебры и защиты информации
Белорусского государственного университета
(протокол № 11 от 25.05.2020);

Научно-методическим советом
Белорусского государственного университета
(протокол № 5 от 17.06.2020).

Зав. кафедрой высшей алгебры
и защиты информации, профессор

В.В. Беняш-Кривец

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Цели и задачи учебной дисциплины

В учебной дисциплине «Дополнительные главы алгебры» рассматриваются основы теории групп, основы теории колец и полей.

Теория групп относится к одному из важнейших разделов современной алгебры. Она имеет богатую и содержательную историю. К настоящему времени эта часть математики превратилась в широкую и богатую содержанием науку, имеющую многочисленные применения, как в самой математике, так и за ее пределами. Теория колец и теория полей являются, наряду с теорией групп, одними из самых старых алгебраических теорий. Цель дисциплины «Дополнительные главы алгебры»: ознакомить студентов с основными понятиями и методами теории групп, теории колец и теории полей, представить ряд важнейших классов групп, колец и полей, а также изложить важнейшие классические результаты о группах, кольцах и полях.

Образовательная цель: обучить студентов фундаментальным методам общей алгебры, ознакомить с основными алгебраическими структурами — группами, кольцами и полями; создать базу для освоения основных понятий и методов современной математики.

Развивающая цель: формирование у студентов основ математического мышления; знакомство с методами математических доказательств; изучение алгоритмов решения конкретных математических задач; привитие студентам умения самостоятельно изучать учебную и научную литературу в области математики.

Основные задачи, решаемые в рамках изучения дисциплины «Дополнительные главы алгебры»:

- ознакомить студентов с фундаментальными понятиями и методами теории групп, теории колец и теории полей;
- изучить ряд важнейших классов групп, колец и полей;
- изучить важнейшие классические результаты о группах, кольцах и полях;
- развить у студентов аналитическое мышление и общую математическую культуру;
- привить студентам умение самостоятельно изучать учебную и научную литературу в области математики.

Место учебной дисциплины в системе подготовки специалиста с высшим образованием.

Учебная дисциплина относится к циклу специальных дисциплин (дисциплина по выбору студента) компонента учреждения высшего образования.

Связи с другими учебными дисциплинами, включая учебные дисциплины компонента учреждения высшего образования, дисциплины специализации и др.

Дисциплина тесно связана с такими дисциплинами как «Алгебра и теория чисел», «Теория групп», «Теория полей», «Группы подстановок», «Базисы Гребнера».

Требования к компетенциям специалиста

Освоение учебной дисциплины «Дополнительные главы алгебры» должно обеспечить формирование следующих компетенций:

академические компетенции:

АК-1. Уметь применять базовые научно-теоретические знания для решения теоретических и практических задач.

АК-2. Владеть системным и сравнительным анализом.

АК-3. Владеть исследовательскими навыками.

АК-4. Уметь работать самостоятельно.

АК-5. Быть способным вырабатывать новые идеи (обладать креативностью).

АК-6. Владеть междисциплинарным подходом при решении проблем.

АК-7. Иметь навыки, связанные с использованием технических устройств, управлением информацией и работой с компьютером.

АК-8. Иметь лингвистические навыки (устная и письменная коммуникация).

АК-9. Уметь учиться, повышать свою квалификацию в течение всей жизни.

социально-личностные компетенции специалиста:

СЛК-2. Быть способным к социальному взаимодействию.

СЛК-3. Обладать способностью к межличностным коммуникациям.

СЛК-5. Быть способным к критике и самокритике.

СЛК-6. Уметь работать в команде.

профессиональные компетенции:

ПК-2. Владеть основными методами, способами и средствами получения, хранения, переработки информации. Применять современные методы проектирования информационных систем, использовать веб-сервисы, оформлять техническую документацию.

ПК-3. Применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности и в областях знаний, непосредственно не связанных со сферой профессиональной деятельности.

ПК-5. Заниматься аналитической и научно-исследовательской деятельностью в области математики и информационных технологий.

ПК-7. Проводить исследования в области эффективности решения производственных задач.

ПК-8. Работать с научной, нормативно-справочной и специальной литературой.

ПК-9. Осуществлять выбор оптимального варианта проведения научно-исследовательских работ.

ПК-13. Взаимодействовать со специалистами смежных профилей.

ПК-16. Готовить доклады, материалы к презентациям.

ПК-22. Работать с научной, технической и патентной литературой.

ПК-27. Реализовывать инновационные проекты в профессиональной деятельности.

В результате изучения учебной дисциплины студент должен:

знать:

- основные понятия и результаты теории групп, теории колец и теории полей;
- методы доказательств важнейших результатов, изучаемых в рамках учебной дисциплины «Дополнительные главы алгебры»;
- алгоритмы решения задач по теории групп, теории колец и теории полей;

уметь:

- определять, является ли данное подмножество подгруппой в группе, подкольцом или идеалом в кольце, подполем в поле;
- производить вычисления в факторгруппе, факторкольце;
- строить конечные поля заданного порядка и производить вычисления в них;
- применять важнейшие теоретические результаты к решению вычислительных задач, связанных с группами, кольцами и полями.

владеть:

- основными навыками решения задач, связанных с группами, кольцами и полями;
- методами доказательств основных теорем, встречающихся в дисциплине «Дополнительные главы алгебры».
- навыками самообразования и способами использования аппарата алгебры для проведения математических и междисциплинарных исследований.

Структура учебной дисциплины

Дисциплина изучается в 4 семестре очной формы получения высшего образования.

На изучение учебной дисциплины «Дополнительные главы алгебры» отводится всего 110 часов, в том числе 68 аудиторных часов, из них: лекции — 34 часа, лабораторные занятия — 30 часов, управляемая самостоятельная работа — 4 часа.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетные единицы.

Форма текущей аттестации по учебной дисциплине — зачет.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Тема 1. Введение в теорию групп

Определение группы, подгруппы, примеры. Гомоморфизм, изоморфизм, автоморфизм. Порядок элемента. Порождающие множества. Циклические группы, их классификация. Смежные классы по подгруппе, индекс подгруппы. Теорема Лагранжа, разложение Лагранжа, следствие о порядке элемента. Нормальная подгруппа. Факторгруппа. Ядро и образ гомоморфизма. Первая (основная) теорема о гомоморфизмах, ее применение к вычислению факторгруппы. Связь подгрупп факторгруппы и промежуточных подгрупп. Вторая и третья теоремы о гомоморфизмах. Прямое произведение групп и разложение группы в прямое произведение своих подгрупп. Свободные абелевы группы. Теорема о строении конечно порожденной абелевой группы. Центр и коммутант. Критерий абелевости факторгруппы.

Тема 2. Введение в теорию колец

Определение кольца, подкольца, поля, подполя, примеры. Мультипликативная группа кольца. Гомоморфизм, изоморфизм колец, ядро гомоморфизма. Идеалы колец. Факторкольца. Основная теорема о гомоморфизмах для колец. Главные идеалы. Кольца главных идеалов. Идеалы в $K[x]$ и $\mathbb{Z}$ Максимальные идеалы и соответствующие им факторкольца. Внутреннее и внешнее прямое произведение колец. Строение кольца $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ и арифметические следствия. Многочлены от n переменных. Мономиальные порядки. Симметрические многочлены. Основная теорема о симметрических многочленах.

Тема 3. Введение в теорию полей

Характеристика поля. Простые поля. Степень расширения, конечные расширения. Мультипликативность степени. Алгебраические и трансцендентные элементы. Минимальный многочлен алгебраического элемента. Алгебраические расширения, алгебраичность конечного расширения. Простые расширения полей. Алгебраически замкнутые поля, алгебраическое замыкание. Поле частных кольца без делителей нуля. Число элементов конечного поля. Теорема о существовании и единственности поля, содержащего p^n элементов. Подполя конечного поля. Мультипликативная группа конечного поля. Неприводимые многочлены над конечным полем.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Дневная форма получения образования

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов по УСП	Формы контроля знаний
		лекции	практические занятия	семинарские занятия	лабораторные	Иное		
1.	Введение в теорию групп.	18			14		2	Контрольная работа
2.	Введение в теорию колец.	8			8		2	Защита индивидуальных заданий
3	Введение в теорию полей	8			8			Контрольная работа
	Итого	34			30		4	

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Перечень основной литературы

1. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Т. 1-3. М.: МЦНМО, 2020.
2. Винберг Э.Б. Курс алгебры. М.: МЦНМО, 2019.
3. Беньш-Кривец В.В., Пунинский Г.Е. Лекции и семинары по алгебре: группы, кольца, поля. Минск: БГУ, 2015. 152 с.
4. Бурдун А.А., Мурашко Е.А., Толкачев М.М., Феденко А.С. Сборник задач по алгебре и аналитической геометрии. Мн.: Университетское, 1999.
5. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре. Санкт-Петербург, Москва, Краснодар: Лань, 2010.
6. Дыбкова Е.В., Жуков И.Б., Семенов А.А., Шмидт Р.А. Задачи по алгебре: основы теории групп. С.-Петербург: Издательство Санкт-Петербургского университета, 1996.

Перечень дополнительной литературы

1. Ван дер Варден Алгебра. М.: Наука, 1976.
2. Ленг С. Алгебра. М.: Мир, 1968.
3. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. М.: Наука, 1972.
4. Сборник задач по алгебре. Под ред. А. И. Кострикина. М.: Наука, 1987.

Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой оценки

Формой текущей аттестации по дисциплине «Дополнительные главы алгебры» учебным планом предусмотрен зачет.

Контроль работы студента проходит в форме собеседования, выполнения самостоятельных работ и практических упражнений в аудитории, а также самостоятельной работы вне аудитории с предоставлением отчета с его устной защитой. Задания к самостоятельным работам составляются согласно содержанию учебного материала.

Зачет по дисциплине выставляется в случае сдачи всех контрольных работ и защиты всех индивидуальных заданий.

Итоговая оценка формируется на основе 3-х документов:

1. Правила проведения аттестации студентов, курсантов, слушателей при освоении содержания образовательных программ высшего образования (Постановление Министерства образования Республики Беларусь №53 от 29.05.2012 г.).

2. ПОЛОЖЕНИЕ о рейтинговой системе оценки знаний студентов по дисциплине в Белорусском государственном университете (Приказ ректора БГУ № 189-ОД от 31.03.2020).

3. Критерии оценки знаний и компетенций студентов по 10-балльной шкале (Письмо Министерства образования Республики Беларусь от 22.12.2003 г. № 21-04-1/105).

Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы

Тема 1. Введение в теорию групп.

1. Доказать, что порядки элементов g и hgh^{-1} группы G равны.
2. Доказать, что $|ab| = |ba|$.
3. Пусть существует единственный элемент $g \in G$, порядок которого равен 2. Доказать, что для любого x имеем $xg = gx$ (или доказать, что $Z(G) \neq 1$).
4. Сколько подгрупп имеет группа S_3 ? Какие из них сопряжены?
5. Пусть G – циклическая группа порядка 9. Сколько элементов порядка 6 содержит группа $G \times S_3$?
6. Доказать, что группа $(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^*$ изоморфна группе $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^+$.
7. Пусть $G = (\mathbb{Z}/16\mathbb{Z})^*$; $H = \{\alpha^2 \mid \alpha \in G\}$. Доказать, что H подгруппа в G и найти смежные классы G по H .
8. Является ли факторгруппа $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ конечной? Циклической?
9. Пусть K – правый смежный класс группы G по подгруппе H . Доказать, что для любых $x, y, z \in K$ имеем $xy^{-1}z \in K$.
10. Доказать, что если K – непустое подмножество группы G и для всех $x, y, z \in K$ имеем $xy^{-1}z \in K$, то K – правый смежный класс группы G по некоторой подгруппе H .
11. Пусть $A \triangleleft G$, $B \triangleleft G$ и $A \cap B = \{1\}$. Доказать, что $xu = ux$ для любых элементов $x \in A$, $y \in B$.
12. Доказать, что комплексные числа, изображения которых заполняют логарифмическую спираль $r = e^{k\varphi}$, $k \neq 0$, $k \in \mathbb{R}$, образуют группу относительно умножения.
13. Сколько различных элементов циклической группы G порядка 40 можно взять в качестве ее образующей?
14. Пусть F, H – подгруппы группы G . В каких случаях $F \cup H$ будет подгруппой?
15. Найти левые и правые смежные классы S_4 по ее подгруппе $H = \{\sigma \in S_4 \mid \sigma(1) = 1\}$.
16. Пусть C_n – циклическая группа порядка n . Найти количество элементов порядка p^m в группе C_{p^n} ($0 < m \leq n$, p – простое).
17. Доказать, что факторгруппа $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ изоморфна мультипликативной группе U всех комплексных чисел с модулем 1.
18. Элементы каких порядков есть в группе $S_3 \times S_3$?

19. Найти левые и правые смежные классы группы S_4 по подгруппе $H = \langle (1234) \rangle$.
 20. Найти левые смежные классы группы A_4 по подгруппе $H = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$.
 21. Пусть $G = (\mathbb{Z}/16\mathbb{Z})^*$, $H = \{a^2 \mid a \in G\}$. Доказать, что $H < G$ и найти смежные классы G по H .
 22. Пусть $G = \langle a \rangle$ – циклическая группа порядка 4, $H = \langle b \rangle$ – циклическая группа порядка 6. Найти порядок элемента (a, b^2) в прямом произведении $G \times H$.
 23. Найти все подгруппы циклической группы порядка 14.
 24. Доказать, что непрерывные строго возрастающие на отрезке $[0,1]$ функции φ со значениями $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$, составляют группу относительно суперпозиции.
 25. Найти порядки элементов $\begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & i \\ i & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ группы $GL_2(\mathbb{C})$.
 26. Найти левые и правые смежные классы группы S_4 по подгруппе $H = \langle (12), (34) \rangle$.
 27. Доказать, что $GL_n(\mathbb{R})/H \cong \mathbb{R}^+$, где $H = \{a \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det a = \pm 1\}$.
 28. Выписать все элементы группы $GL_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ и указать их порядки.
 29. Найти все подгруппы группы $(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^*$.
 30. Доказать, что множество G всех ненулевых вещественных чисел α , для каждого из которых α^n – рациональное число при некотором $n \in \mathbb{N}$, является подгруппой $\mathbb{R}^*$.
- Форма контроля – контрольная работа.

Тема 2. Введение в теорию колец.

1. Пусть $K = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$. Доказать, что K – кольцо и что отображение $f: K \rightarrow \mathbb{R}$, $f(A) = a + b$ – гомоморфизм. Найти ядро f .
2. Является ли факторкольцо полем: $\mathbb{Z}_5[x]/(2x^3 + x^2 - 1)$?
3. Найдите идеал, порожденный многочленами $x^4 + 4x^2 - 7x + 2$, $x^3 + 3x^2 - 4$ в кольце $\mathbb{Q}[x]$.
4. Найти многочлен третьей степени, корнями которого являются четвертые степени комплексных корней многочлена $2x^3 - x^2 + 2$.
5. Найти образующую идеала $M = (x^4 + 4x^2 - 7x + 2, x^3 + 3x^2 - 4)$ в кольце $\mathbb{Q}[x]$.

6. Пусть $I = (x^2, 3)$ – идеал, порожденный x^2 и 3 в кольце $\mathbb{Z}[x]$. Доказать, что I – не главный идеал.
7. Является ли идеалом множество I многочленов с четными старшими коэффициентами в кольце $\mathbb{Z}[x]$?
8. Пусть I_1, I_2 – идеалы кольца K и $K = I_1 \oplus I_2$. Доказать, что $\forall x \in I_1$ и $\forall y \in I_2$, $xy = 0$.
9. Доказать, что множество I_S непрерывных функций, образующихся в 0 на фиксированном подмножестве $S \subseteq [a, b]$, является идеалом в кольце функций, непрерывных на $[a, b]$.
10. Является ли кольцом совокупность всех подмножеств квадрата с вершинами $(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)$ относительно операций $X + Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y), X \cdot Y = X \cap Y$.
11. Пусть R – коммутативное кольцо с единицей 1 . Доказать, что для любого $\eta \in R$ найдется такой гомоморфизм $\varphi: \mathbb{Z}[x] \rightarrow R$, что $\varphi(1) = 1, \varphi(x) = \eta$.
12. Является ли идеалом (подкольцом) множество $\mathbb{Z}[x]$ в кольце $\mathbb{Q}[x]$?
13. Найти идеал, порожденный множеством $M = \{x^6 - 1, x^4 - 1\}$ в кольце $\mathbb{R}[x]$.
14. В кольце $\mathbb{Z}$ найти порождающий элемент идеала $I = (6, 9, 15) \cap (10, 25, 30)$.
15. Найти многочлен третьей степени, корнями которого являются четвертые степени комплексных корней многочлена $2x^3 - x^2 + 2$.
16. Найти значение многочлена $x_1^4 x_2 + \dots$ от корней многочлена $3x^3 - 5x^2 + 1$.
17. Является ли кольцом множество чисел вида $a + b\sqrt[3]{5} + c\sqrt[3]{25}$, где $a, b, c \in \mathbb{Q}$.
18. Пусть K – множество всех 2×2 – матриц над $\mathbb{R}$, коммутирующих с матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Доказать, что K – кольцо.
19. Доказать, что $\mathbb{R}[x, y] / (x - y) \cong \mathbb{R}[x]$.
20. Пусть $K = \mathbb{Z}[x], I = x^2 + 1$. Выяснить является ли факторкольцо K / I полем.
21. Найти значение симметрического многочлена F от корней многочлена $f(x)$:

$$F = x_1^3 x_2 x_3 + x_1^3 x_2 x_4 + x_1^3 x_3 x_4 + x_2^3 x_1 x_3 + x_2^3 x_1 x_4 + x_2^3 x_3 x_4 + x_3^3 x_1 x_2 + x_3^3 x_1 x_4 +$$

$$+ x_3^3 x_2 x_4 + x_4^3 x_1 x_2 + x_4^3 x_1 x_3 + x_4^3 x_2 x_3,$$

$$f(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x + 1.$$
22. Является ли кольцом множество рациональных чисел вида $\frac{m}{2^a 7^b 13^c}$, где a, b, c – неотрицательные целые числа, $m \in \mathbb{Z}$.

Форма контроля – защита индивидуальных заданий.

Примерные варианты контрольных работ.

Контрольная работа 1.

1. Обозначим через G множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ 5b & a \end{pmatrix}$, где $a, b \in Q$, a и b одновременно не равны нулю. Доказать, что G является подгруппой в $GL_2(Q)$.
2. Найти разложение Лагранжа в левые смежные классы группы $S_3 \times H$, где H – циклическая группа порядка 12, по подгруппе $\{e\} \times H$.
3. Найти порядок элемента $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ в группе $GL_2(\mathbb{C})$.
4. Доказать, что отображение $f: GL_n(C) \rightarrow C^*$, $f(A) = (\det A)^3$, является гомоморфизмом. Найти ядро f .
5. В факторгруппе R^* / Q^* найти порядок элемента $\frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[7]{3}} Q^*$.

Контрольная работа 2.

1. Доказать, что кольцо из четырех элементов $\{0, 1, a_1, a_2\}$ с правилами действий $a_1^2 = a_2$, $a_2^2 = a_1$, $a_1 a_2 = a_2 a_1 = 1$, $1 + 1 = 0$, $1 + a_1 = a_2$ образует поле.
2. Найти степень расширения $[\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{5}}) : \mathbb{Q}]$. Какой вид имеют элементы этого расширения?
3. Доказать, что $\mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q}) = \mathbb{Q}(\sqrt{p} + \sqrt{q})$, если p, q – различные простые числа.
4. Какие из полей $\mathbb{Q}(-\frac{3}{4} + i\sqrt{3})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{3} + i)$, $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, i)$ совпадают?
5. Доказать, что поля $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ и $\mathbb{Q}(\sqrt{q})$, где p, q – различные простые числа, не изоморфны.

Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

При организации образовательного процесса используется **эвристический подход**, который предполагает:

- осуществление студентами личностно-значимых открытий окружающего мира;
- демонстрацию многообразия решений большинства профессиональных задач и жизненных проблем;
- творческую самореализацию обучающихся в процессе создания образовательных продуктов;
- индивидуализацию обучения через возможность самостоятельно ставить цели, осуществлять рефлексию собственной образовательной деятельности.

При организации образовательного процесса используется **практико-ориентированный подход**, который предполагает:

- освоение содержания образования через решения практических задач;
- приобретение навыков эффективного выполнения разных видов профессиональной деятельности;
- ориентацию на генерирование идей, реализацию групповых студенческих проектов, развитие предпринимательской культуры;
- использованию процедур, способов оценивания, фиксирующих сформированность профессиональных компетенций.

При организации образовательного процесса **используется метод проектного обучения**, который предполагает:

- способ организации учебной деятельности студентов, развивающий актуальные для учебной и профессиональной деятельности навыки планирования, самоорганизации, сотрудничества и предполагающий создание собственного продукта;
- приобретение навыков для решения исследовательских, творческих, социальных, предпринимательских и коммуникационных задач.

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа студентов - это любая деятельность, связанная с воспитанием мышления будущего профессионала. В широком смысле под самостоятельной работой следует понимать совокупность всей самостоятельной деятельности студентов как в учебной аудитории, так и вне её, в контакте с преподавателем и в его отсутствии.

Самостоятельная работа реализуется:

1. Непосредственно в процессе аудиторных занятий - на лекциях.

2. В контакте с преподавателем вне рамок расписания - на консультациях по учебным вопросам, в ходе творческих контактов, при ликвидации задолженностей, при выполнении индивидуальных заданий и т.д.

3. В библиотеке, дома, в общежитии, на кафедре при выполнении студентом учебных и творческих задач.

При изучении дисциплины организация самостоятельной работы студентов должна представлять единство трех взаимосвязанных форм:

1. Внеаудиторная самостоятельная работа;

2. Аудиторная самостоятельная работа, которая осуществляется под непосредственным руководством преподавателя;

3. Творческая, в том числе научно-исследовательская работа.

Примерный перечень вопросов к зачету

1. Определение группы, подгруппы, примеры.
2. Гомоморфизм, изоморфизм, автоморфизм.
3. Порядок элемента. Порождающие множества.
4. Циклические группы, их классификация.
5. Смежные классы по подгруппе, индекс подгруппы.
6. Теорема Лагранжа, разложение Лагранжа, следствие о порядке элемента. Нормальная подгруппа.
7. Факторгруппа.
8. Ядро и образ гомоморфизма.
9. Первая (основная) теорема о гомоморфизмах, ее применение к вычислению факторгруппы. Связь подгрупп факторгруппы и промежуточных подгрупп.
10. Вторая и третья теоремы о гомоморфизмах.
11. Прямое произведение групп и разложение группы в прямое произведение своих подгрупп.
12. Свободные абелевы группы. Теорема о строении конечно порожденной абелевой группы.
13. Центр и коммутант. Критерий абелевости факторгруппы.
14. Определение кольца, подкольца, поля, подполя, примеры. Мультипликативная группа кольца.
15. Гомоморфизм, изоморфизм колец, ядро гомоморфизма. Идеалы колец. Факторкольца.
16. Основная теорема о гомоморфизмах для колец. Главные идеалы. Кольца главных идеалов. Идеалы в $K[x]$ и $\mathbb{Z}$.
17. Максимальные идеалы и соответствующие им факторкольца.
18. Внутреннее и внешнее прямое произведение колец.
19. Строение кольца $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ и арифметические следствия.
20. Характеристика поля. Простые поля.
21. Степень расширения, конечные расширения. Мультипликативность степени.
22. Алгебраические и трансцендентные элементы. Минимальный многочлен алгебраического элемента.
23. Алгебраические расширения, алгебраичность конечного расширения. Простые расширения полей.
24. Алгебраически замкнутые поля, алгебраическое замыкание.

25. Поле частных кольца без делителей нуля.
26. Число элементов конечного поля. Теорема о существовании и единственности поля, содержащего p^n элементов. Подполя конечного поля. Мультипликативная группа конечного поля.
27. Неприводимые многочлены над конечным полем.

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УВО

Название дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы по изучаемой учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
Эллиптические кривые	Кафедра высшей алгебры и защиты информации	нет	Вносить изменения не требуется (протокол № 11 от 25.05.2020)
Гладкие многообразия	Кафедра геометрии, топологии и методики преподавания математики	нет	Вносить изменения не требуется (протокол № 11 от 25.05.2020)

**ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ
ПО ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ**

на ____/____ учебный год

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры высшей алгебры и защиты информации (протокол № ____ от _____ 20__ г.)

Заведующий кафедрой

(степень, звание) (подпись) (И.О.Фамилия)

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета

(степень, звание) (подпись) (И.О.Фамилия)