Белорусский государственный университет

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе и
образовательным инновациям
_______________ О.Н. Здрок
«30» ___________ 2020 г.

Регистрационный № УД-9347/уч.

АЛГЕБРА

Учебная программа учреждения высшего образования по учебной дисциплине для специальности:

1-31 03 01 Математика (по направлениям)

Направление специальности:

1-31 03 01-04 Математика (научно-конструкторская деятельность)

2020 г.

Учебная программа составлена на основе образовательного стандарта ОСВО 1-31 03 01-2013, утвержденного 30.08.2013, и учебного плана G31-209/уч., утвержденного 29.05.2015.

СОСТАВИТЕЛИ:

Беняш-Кривец Валерий Вацлавович – заведующий кафедрой высшей алгебры и защиты информации Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор.

РЕЦЕНЗЕНТ:

Говорушко Игорь Олегович, научный сотрудник отдела алгебры Института математики Национальной Академии Наук Республики Беларуси, кандидат физико-математических наук.

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой высшей алгебры и защиты информации
(протокол № 11 от 22.05.2020)

Научно-методическим советом
Белорусского государственного университета
(протокол № 5 от 17.06.2020)

Зав. кафедрой высшей алгебры
и защиты информации, профессор В.В. Беняш-Кривец

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Цели и задачи учебной дисциплины

Учебная дисциплина «Алгебра» является базовой для преподавания большинства математических курсов. Целью дисциплины «Алгебра» является изложение основ современной алгебры.

Образовательная цель: обучить студентов фундаментальным методам общей алгебры, линейной алгебры, теории чисел; ознакомить с основными алгебраическими структурами — группами, кольцами и полями; создать базу для освоения основных понятий и методов современной математики.

Развивающая цель: формирование у студентов основ математического мышления; знакомство с методами математических доказательств; изучение алгоритмов решения конкретных математических задач; привитие студентам умения самостоятельно изучать учебную и научную литературу в области математики.

Основные задачи, решаемые в рамках изучения дисциплины «Алгебра»:

–ознакомить студентов с фундаментальными понятиями и методами линейной алгебры. Изучить матрицы и определители, методы решения систем линейных уравнений, теорию векторных пространств и линейных операторов, теорию квадратичных и билинейных форм;

–изучить комплексные числа и многочлены;

–развить у студентов аналитическое мышление и общую математическую культуру;

–привить студентам умение самостоятельно изучать учебную и научную литературу в области математики.

Место учебной дисциплины в системе подготовки специалиста с высшим образованием.

Учебная дисциплина относится **к циклу** специальных дисциплин компонента учреждения высшего образования.

Связи с другими учебными дисциплинами, включая учебные дисциплины компонента учреждения высшего образования, дисциплины специализации и др.

Дисциплина «Алгебра» является базовой для преподавания большинства математических курсов. Наиболее тесной является связь данной дисциплины с такими дисциплинами как «Аналитическая геометрия», «Математический анализ», «Дифференциальные уравнения».

Требования к компетенциям специалиста

Освоение учебной дисциплины «Алгебра» должно обеспечить формирование следующих **компетенций:**

академические компетенции:

АК-1. Уметь применять базовые научно-теоретические знания для решения теоретических и практических задач.

АК-2. Владеть системным и сравнительным анализом.

АК-3. Владеть исследовательскими навыками.

АК-4. Уметь работать самостоятельно.

АК-5. Быть способным вырабатывать новые идеи (обладать креативностью).

АК-6. Владеть междисциплинарным подходом при решении проблем.

АК-7. Иметь навыки, связанные с использованием технических устройств, управлением информацией и работой с компьютером.

АК-8. Иметь лингвистические навыки (устная и письменная коммуникация).

АК-9. Уметь учиться, повышать свою квалификацию в течение всей жизни.

социально-личностные компетенции специалиста:

СЛК-2. Быть способным к социальному взаимодействию.

СЛК-3. Обладать способностью к межличностным коммуникациям.

СЛК-5. Быть способным к критике и самокритике.

СЛК-6. Уметь работать в команде.

профессиональные компетенции:

ПК-2. Владеть основными методами, способами и средствами получения, хранения, переработки информации. Применять современные методы проектирования информационных систем, использовать веб-сервисы, оформлять техническую документацию.

ПК-3. Применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности и в областях знаний, непосредственно не связанных со сферой профессиональной деятельности.

ПК-5. Заниматься аналитической и научно-исследовательской деятельностью в области математики и информационных технологий.

ПК-7. Проводить исследования в области эффективности решения производственных задач.

ПК-8. Работать с научной, нормативно-справочной и специальной литературой.

ПК-9. Осуществлять выбор оптимального варианта проведения научно-исследовательских работ.

ПК-13. Взаимодействовать со специалистами смежных профилей.

ПК-16. Готовить доклады, материалы к презентациям.

ПК-22. Работать с научной, технической и патентной литературой.

ПК-27. Реализовывать инновационные проекты в профессиональной деятельности.

В результате изучения учебной дисциплины студент должен:

знать:

–основные понятия и результаты линейной алгебры, теории билинейных и квадратичных форм;

–методы доказательств важнейших результатов, изучаемых в рамках учебной дисциплины «Алгебра»;

–алгоритмы решения задач по алгебре;

уметь:

–выполнять действия с комплексными числами в алгебраической и тригонометрической форме, извлекать корни из комплексных чисел, применять формулу Муавра;

–вычислять определители;

–выполнять операции над матрицами;

–решать системы линейных уравнений;

–находить базис векторного пространства, суммы и пересечения подпространств, координаты вектора в заданном базисе, находить ранг матрицы и системы векторов;

–находить собственные значения и собственные векторы матрицы и линейного оператора;

–приводить квадратичную форму к каноническому виду;

–приводить ортогональный оператор к каноническому виду;

–находить ортонормированный базис, ортогональное дополнение к подпространству;

владеть:

–основными навыками решения задач, связанных с линейной алгеброй, многочленами, комплексными числами, квадратичными и билинейными формами, группами, кольцами и полями;

–методами доказательств основных теорем, встречающихся в курсе «Алгебра».

– навыками самообразования и способами использования аппарата алгебры для проведения математических и междисциплинарных исследований.

Структура учебной дисциплины

Учебная программа предназначена для студентов первого курса (1,2 семестр) очной формы получения образования.

В соответствии с учебным планом специальности на изучение дисциплины отводится 288 часов, в том числе аудиторных занятий – 140 часов, из них лекции – 70 часов, практические занятия – 60 часов и управляемая самостоятельная работа – 10 часов, из них:

1 семестр – всего 148 часов, в том числе аудиторных — 72 часа, из них лекции — 36 часов, практические занятия — 30 часов, управляемая самостоятельная работа – 6 часов.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 4 зачетные единицы;

2 семестр – всего 140 часов, в том числе аудиторных — 68 часов, из них лекции — 34 часа, практические занятия — 30 часов, управляемая самостоятельная работа – 4 часа.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 4 зачетные единицы.

Форма текущей аттестации – зачет и экзамен в каждом семестре.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Тема 1. Арифметика целых чисел. Комплексные числа.

Теорема о делении с остатком для целых чисел. Алгоритм Евклида. НОД и НОК целых чисел. Определение комплексных чисел, сопряженные комплексные числа. Тригонометрическая форма комплексного числа, формула Муавра, геометрия операций над комплексными числами. Корни n-ой степени из комплексного числа, корни n-ой степени из единицы, первообразные корни и их свойства.

Тема 2. Матрицы и операции над ними.

Прямоугольные матрицы, равенство матриц, сложение и умножение матрицы на скаляр, транспонирование матриц. Умножение матриц, ассоциативность умножения матриц, связь между операциями сложения, умножения и транспонирования матриц. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.

Тема 3. Перестановки и подстановки. Определители и их применение.

Число перестановок конечного множества, четность перестановки, число четных (нечетных) перестановок конечного множества. Число подстановок конечного множества, четность подстановки, разложение подстановки в произведение независимых циклов. Определение определителя и его свойства. Теорема Лапласа. Построение обратной матрицы. Метод Крамера решения систем линейных уравнений.

Тема 4. Многочлены от одной переменной.

Определение многочлена от одной переменной, теорема о делении с остатком, НОД и НОК многочленов. Разложение многочлена на неприводимые множители. Теорема Безу, схема Горнера. Корни многочленов, кратные корни. Основная теорема алгебры комплексных чисел, формулы Виета, неприводимые многочлены над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$.

Тема 5. Алгебраическая операция, понятие группы, кольца, поля.

Определение бинарной алгебраической операции, нейтральный и симметричный элементы. Определения и примеры групп, колец, полей и их свойства.

Тема 6. Векторные пространства.

Определение и примеры. Система образующих, конечномерные пространства. Линейная зависимость векторов. Базис, размерность. Координаты вектора, их изменение при изменении базиса. Матрица перехода. Ранг системы векторов. Ранг матрицы. Подпространство, его размерность. Сумма и пересечение подпространств, связь их размерностей. Прямая сумма подпространств.

Тема 7. Системы линейных уравнений.

Системы линейных уравнений, однородные системы. Теорема Кронекера—Капелли. Фундаментальная система решений. Структура множества решений произвольной системы линейных уравнений.

Тема 8. Линейные операторы векторных пространств.

Линейный оператор, его ядро и образ. Ранг и дефект. Матрица линейного оператора. Изменение матрицы оператора при переходе к другому базису. Алгебраические действия над линейными операторами. Матрица композиции и суммы линейных операторов. Условия обратимости оператора. Инвариантное подпространство. Сужение оператора на инвариантное подпространство. Матрица оператора при наличии инвариантного подпространства, при разложении пространства в прямую сумму инвариантных подпространств. Собственное значение и собственный вектор оператора.

Тема 9. Жорданова нормальная форма матриц.

Характеристический многочлен матрицы. Определение и построение нормальной формы Жордана (без доказательства). Минимальный многочлен.

Тема 10. Билинейные и квадратичные формы.

Билинейные и квадратичные формы на векторных пространствах. Канонический вид. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа. Нормальный вид вещественной и комплексной квадратичных форм. Знакоопределенные квадратичные формы, критерий Сильвестра.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Дневная форма получения образования

Перенесите часы в столбец практические. У вас нет лабораторороных

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов по УСР	Формы контроля знаний
		лекции	практические занятия	семинарские	лабораторные	Иное		
	1 семестр							
1	Арифметика целых чисел, комплексные числа.	**8**	**8**					защита индивидуальных заданий
2	Матрицы и операции над матрицами.	**8**	**6**				**2**	Контрольная работа
3	Перестановки, подстановки. Определители и их применение.	**8**	**8**				**2**	защита индивидуальных заданий
4	Многочлены от одной переменной.	**8**	**6**					защита индивидуальных заданий
5	Алгебраическая операция, понятие группы, кольца, поля.	**4**	**2**				**2**	Контрольная работа
	Всего за семестр	**36**	**30**				**6**	
	2 семестр							
6	Векторные пространства.	**10**	**10**					защита индивидуальных заданий
7	Системы линейных уравнений.	**6**	**4**				**2**	Контрольная работа
8	Линейные операторы векторных пространств.	**6**	**6**					защита индивидуальных заданий
9	Нормальные формы матриц.	**4**	**4**					защита индивидуальных заданий
10	Билинейные и квадратичные формы.	**8**	**6**				**2**	Контрольная работа
	Всего за семестр	**34**	**30**				**4**	
	Всего по курсу	**70**	**60**				**10**	

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Перечень основной литературы

1. Виноградов И.М. Основы теории чисел. М.: Ленанд, 2020.
2. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Т. 1-3. М.: МЦНМО, 2020.
3. Винберг Э.Б. Курс алгебры. М.: МЦНМО, 2019.
4. Беняш-Кривец В.В., Пунинский Г.Е. Лекции и семинары по алгебре: основные понятия алгебры и теории чисел. Минск: БГУ, 2015. 152 с. 116 с.
5. Беняш-Кривец В.В., Пунинский Г.Е. Лекции и семинары по алгебре: группы, кольца, поля. Минск: БГУ, 2015. 152 с.
6. Милованов М.В., Тышкевич Р.И., Феденко А.С. Алгебра и аналитическая геометрия. Т. 1. Мн.: Амалфея, 2001.
7. Милованов М.В., Толкачев М.М., Тышкевич Р.И., Феденко А.С. Алгебра и аналитическая геометрия. Т. 2. Мн.: Амалфея, 2001.
8. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. М.: МЦНМО, 1998.
9. Бурдун А.А., Мурашко Е.А., Толкачев М.М., Феденко А.С. Сборник задач по алгебре и аналитической геометрии. Мн.: Университетское, 1999.
10. Монахов В.С., Бузланов А.В. Алгебра и теория чисел: практикум. Минск: Изд. центр БГУ, 2007.
11. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре. Санкт-Петербург, Москва, Краснодар: Лань, 2010.

Перечень дополнительной литературы

1. Айерлэнд К., Роузен М. Классическое введение в современную теорию чисел. М.: Мир, 1987.
2. Ван дер Варден Алгебра. М.: Наука, 1976.
3. Ленг С. Алгебра. М.: Мир, 1968.

Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой оценки

Формой текущей аттестации по дисциплине «Алгебра» учебным планом предусмотрен зачет и экзамен.

Контроль работы студента проходит в форме собеседования, выполнения самостоятельных работ и практических упражнений в аудитории, а также самостоятельной работы вне аудитории с предоставлением отчета с его устной защитой. Задания к самостоятельным работам составляются согласно содержанию учебного материала.

Зачет по дисциплине выставляется в случае сдачи всех контрольных работ. Рейтинговая оценка предусматривает использование весовых коэффициентов для текущего контроля знаний и текущей аттестации студентов по дисциплине.

Примерные весовые коэффициенты, определяющие вклад текущего контроля знаний и текущей аттестации в рейтинговую оценку:

Формирование оценки за текущую успеваемость:

– выполнение контрольной работы – 50 %;

– защита индивидуальных заданий– 50 %.

Итоговая оценка формируется на основе 3-х документов:

1. Правила проведения аттестации студентов, курсантов, слушателей при освоении содержания образовательных программ высшего образования (Постановление Министерства образования Республики Беларусь №53 от 29.05.2012 г.).

2. ПОЛОЖЕНИЕ о рейтинговой системе оценки знаний студентов по дисциплине в Белорусском государственном университете (Приказ ректора БГУ № 189-ОД от 31.03.2020).

3. Критерии оценки знаний и компетенций студентов по 10-балльной шкале (Письмо Министерства образования Республики Беларусь от 22.12.2003 г. № 21-04-1/105).

Рейтинговая оценка по дисциплине рассчитывается на основе оценки текущей успеваемости и экзаменационной оценки с учетом их весовых коэффициентов. Вес оценки по текущей успеваемости составляет 40 %, экзаменационная оценка – 60 %.

Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы

Тема 2. Матрицы и операции над ними.

1. Две квадратные матрицы A и B называются перестановочными, если $AB = BA$. Докажите, что если матрицы B, C перестановочны с A, то $B + C$ и BC также перестановочны с A.
2. Доказать, что если матрицы A и B перестановочны, то $(A+B)^n = \sum_{i=1}^{n} C_n^i A^i B^{n-i}$.
3. Вычислить BC и CB^T, где $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} i & -2 \\ 1 & 3i \end{pmatrix}$.
4. Вычислить $AA^{\top}$ и $f(B)$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2-i & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1-2i & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $f(x) = -x^2 + 3x - 6$.
5. Для матрицы $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ и полинома $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 4$ вычислить $f(C)$.
6. С помощью элементарных преобразований найти матрицу C^{-1}, где $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
7. Используя явные формулы для обратной матрицы, вычислить C^{-1}, где $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.
8. Найти A^{-1}, где $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.
9. Найти все матрицы X, перестановочные с данной матрицей $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$. Получающуюся при решении систему линейных уравнений решить методом Гаусса.
10. Пусть A – квадратная матрица порядка n, такая, что $A^2 = A$. Докажите, что $(2A - E_n)^2 = E_n$.
11. Найдите все квадратные матрицы порядка 2, такие, что A^2 – нулевая матрица.

12. Матрица S называется симметрической, если $S^T = S$. Докажите, что если A – произвольная квадратная матрица, то матрицы $A + A^T$, AA^T являются симметрическими.
13. Пусть A – обратимая квадратная матрица. Докажите, что $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

Форма контроля – контрольная работа

Тема 3. Перестановки и подстановки. Определители и их применение.

1. Даны подстановки $f, g \in S_9$, $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 8 & 1 & 3 & 5 & 7 & 6 & 4 & 9 \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 4 & 2 & 1 & 8 & 5 & 3 & 9 & 6 \end{pmatrix}$. Вычислить $f^{-1}, fg, gf, (fg)^2, g^{-2}$. Записать подстановки f и g в виде произведения независимых циклов и в виде произведения транспозиций. Найти их четность.
2. Запишите подстановку $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 8 & 1 & 3 & 5 & 7 & 6 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ в виде произведения транспозиций и произведения независимых циклов.
3. Даны подстановки $f, g \in S_9$, где $f = (143)(25)(6798)$, $g = (214)(345)(5679)(13)$. Вычислить fg, gf. Найти их четность.
4. При каких значениях i, j, k подстановка $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & i & 1 & 3 & j & 7 & 6 & 4 & k \end{pmatrix}$ – четная?
5. Вычислить α^{-1}, $\alpha\beta$, $\beta\alpha$ α^{310}, где: $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 8 & 1 & 3 & 6 & 7 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 4 & 2 & 1 & 8 & 5 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.
6. Дана подстановка $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & i & 1 & 3 & j & 7 & 6 & 4 & 8 \end{pmatrix}$. При каких значениях i, j подстановка f четная, а при каких – нечетная?
7. С каким знаком произведение $a_{25}a_{41}a_{36}a_{52}a_{13}a_{65}$ входит в определитель шестого порядка?
8. Выписать все миноры второго порядка, содержащиеся в 1-й и 3-й строках матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, а также алгебраические дополнения к ним. Пользуясь теоремой Лапласа, записать разложение $\det A$: а) по 1-й и 3-й строке; б) по 2-й строке.

9. Как изменится определитель порядка n, если его повернуть на 90° вокруг «центра» против часовой стрелки?

10. Доказать, что определитель $\begin{vmatrix} z_1 & \overline{z}_1 & a \\ z_2 & \overline{z}_2 & b \\ z_3 & \overline{z}_3 & c \end{vmatrix}$, где z_1, z_2, z_3 – комплексные, а a, b, c – вещественные числа, является чисто мнимым числом.

11. С каким знаком входит в развернутое выражение определителя порядка n произведение элементов побочной диагонали?

12. Как изменится определитель порядка n, если каждый его элемент a_{ik} умножить на число c^{i-k}, где $c \neq 0$ – фиксированное число?

13. Чему равен определитель, у которого сумма строк с четными номерами равна сумме строк с нечетными номерами?

14. Найти наибольшее значение определителя третьего порядка, составленного из чисел 0 и 1.

15. Как изменится определитель квадратной матрицы, если каждый элемент матрицы заменить на противоположный?

16. Как изменится определитель квадратной матрицы, если его строки записать в обратном порядке?

17. Как изменится определитель квадратной матрицы, если первую строку поставить на место последней строки, а остальные строки сдвинуть вверх, не меняя их порядок?

18. Пусть A – квадратная матрица над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Заменяя элементы матрицы A сопряженными комплексными числами, получим матрицу B. Как связаны между собой определители матриц A и B?

19. Пусть все элементы матриц A и A^{-1} – целые числа. Чему равны определители этих матриц?

20. Найдите такие значения i, j, k, чтобы произведение $a_{2i}a_{41}a_{j3}a_{5k}a_{12}a_{64}$ входило в определитель матрицы шестого порядка со знаком минус.

21. Вычислите определители матриц $B = \begin{pmatrix} 3i & 1+i \\ 2 & 1-i \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

22. Вычислите определитель матрицы $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -3 & 7 \\ -3 & -3 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 7 \end{pmatrix}$.

23. Разложить определитель матрицы $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -3 & 7 \\ -3 & -3 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 7 \end{pmatrix}$ по второй строке и третьему столбцу.

Форма контроля – защита индивидуальных заданий

Тема 5. Алгебраическая операция, понятие группы, кольца, поля.

1. Охарактеризуйте каждую из заданных алгебраических операций на множестве M, т.е. выясните, является ли операция коммутативной, ассоциативной, существует ли нейтральный относительно нее элемент e, для каких элементов существуют симметричные элементы: а) $M = \mathbb{N}$, $a \circ b = НОД(a,b)$; б) $M = \mathbb{N}$, $a \circ b = a^b$; в) $M = \mathbb{N}$, $a \circ b = \max\{a,b\}$; г) $M = \mathbb{N}$, $a \circ b = a^2 b^2$; д) $M = \mathbb{R}^{>0}$, $a \circ b = \sqrt{ab}$; е) $M = \mathbb{R}^{>0}$, $a \circ b = \dfrac{a}{b}$.
2. Выясните, образует ли группу каждое из множеств относительно названной операции:

   а) четных чисел относительно сложения;

   б) нечетных чисел относительно сложения;

   в) рациональных (действительных) чисел, отличных от нуля, относительно умножения;

   г) рациональных чисел, знаменатели которых – степени числа 2 с целыми неотрицательными показателями относительно сложения.
3. Выясните, какие из множеств являются кольцами и какие полями относительно обычных операций сложения и умножения:

   а) множество $\mathbb{Z}$; б) множество $m\mathbb{Z} = \{mk \mid k \in \mathbb{Z}\}$; в) $\{a + b\sqrt{2} \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$; г) $\{a + b\sqrt{2} \mid a,b \in \mathbb{Q}\}$; д) $\{a + b\sqrt{2}i \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$; е) $\{a + b\sqrt{2}i \mid a,b \in \mathbb{Q}\}$; ж) множество рациональных чисел, знаменатели которых не делятся на данное простое число p; з) $\{a + b\sqrt[3]{2} \mid a,b \in \mathbb{Q}\}$.

   Форма контроля – контрольная работа

Тема 7. Системы линейных уравнений.

1. Решите следующие системы, используя правило Крамера:

   а) $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 = -8 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 15 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$, б) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -2 \\ 4x_1 + 3x_3 = -1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$.
2. Исследуйте системы на совместность. Совместные системы решите методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -2 \\ 4x_1 + 3x_3 = -1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 3ix_1 + x_2 - x_3 = -1 \\ 2x_1 - ix_2 + 2x_3 = i - 2 \\ -x_1 + 3x_2 - ix_3 = 3 \end{cases}$; в) $2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 = 5$.

3. Найти фундаментальную систему решений и общее решение системы уравнений $AX = 0$, где а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 7 & 1 & 5 & 3 \\ 5 & 9 & 4 & 7 & 5 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 7 & 13 & 10 & 11 & 9 \\ -1 & -3 & -14 & -5 & -5 \\ 0 & -2 & -22 & -6 & -4 \\ 7 & 11 & -12 & 5 & 3 \end{pmatrix}$; в) $A := \begin{bmatrix} 10 & 18 & 8 & 14 & 10 \\ -5 & -9 & -4 & -7 & -3 \\ 1 & 0 & -19 & -4 & -2 \\ 15 & 25 & -10 & 15 & 9 \end{bmatrix}$; г) $A := \begin{bmatrix} 13 & 23 & 6 & 17 & 13 \\ -6 & -11 & -7 & -9 & -5 \\ -7 & -14 & -21 & -14 & -8 \\ 11 & 19 & 0 & 13 & 7 \end{bmatrix}$; д) $A = (1, 2, -1, 0, 3)$.

4. Линейную оболочку следующей системы векторов задайте системой линейных уравнений: а) $v_1 = (1,1,1,1)$; б) $v_1 = (1,1,1,1), v_2 = (1,2,3,4)$; в) $v_1 = (1,1,1,1), v_2 = (1,2,3,4), v_3 = (1,0,1,0)$.

Форма контроля **–** контрольная работа

Тема 10. Билинейные и квадратичные формы.

1. Пусть A – матрица невырожденной билинейной формы Φ на вещественном пространстве V размерности n, где n – нечетно. Существует ли другой базис V, в котором матрицей Φ является $-A$? Что будет в случае четного n?
2. Доказать, что если $f(x), g(y)$ – линейные формы на векторном пространстве V, то отображение $\Phi : V \times V \to V, \quad \Phi(x, y) = f(x)g(y)$, является билинейной формой на V и $\operatorname{rank}\Phi = 1$. Является ли Φ симметрической, кососимметрической?
3. Пусть Φ – билинейная форма на векторном пространстве V и пусть W – множество всех векторов $x \in V$ таких, что $\Phi(x, y) = 0$ для всех векторов $y \in V$. Доказать, что W – подпространство в V и справедлива формула $\operatorname{rank}\Phi = \dim V - \dim W$.
4. Пусть Φ – билинейная форма на векторном пространстве V, V_1 – подпространство в V и Φ_1 – ограничение Φ на V_1. Предположим, что Φ_1 – невырожденная билинейная форма. Доказать, что $\operatorname{rank}\Phi \geq \dim V_1$

1. Найти полярную билинейную форму F для квадратичной формы $f(x)=x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2-6x_1x_3+4x_2x_3-x_3^2$. Записать матрицу F. Вычислить $F(x,y)$, где $x=(1,i,1)$, $y=(2,-1,-i)$.
2. Найти симметрическую билинейную форму Φ, ассоциированную с квадратичной формой $q(x)=F(x,x)$, где $F(x,y)=-x_1y_2+x_2y_1-2x_2y_2+3x_2y_3-x_3y_1+2x_3y_3$. Записать матрицу Φ. Вычислить $\Phi(x,y)$, где $x=(2,1-i,0)$, $y=(0,-1,i)$.

1. Привести данную квадратичную форму к каноническому виду с помощью метода Лагранжа. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы. $f(x)=x_1^2+x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$.
2. Выясните, какие из квадратичных форм $f_1=x_1^2-x_2x_3$, $f_2=y_1y_2-y_3^2$, $f_3=z_1z_2+z_3^2$ эквивалентны между собой а) над $\mathbb{C}$; б) над $\mathbb{R}$.
3. Привести квадратичную форму $q(x)=x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4$ к нормальному виду над полями вещественных и комплексных чисел. Над полем $\mathbb{R}$ найти ее положительный и отрицательный индекс инерции, сигнатуру и ранг.

1. При каких значениях λ данная квадратичная форма положительно определена, отрицательно определена. $f(x)=\lambda x_1^2-2x_2^2-3x_3^2+2x_1x_2-2x_1x_3+2x_2x_3$.
2. Найдите все значения λ, при которых квадратичная форма $-2x_1^2-8x_2^2-3x_3^2+2\lambda x_1x_2+4x_1x_3-2\lambda x_2x_3$ отрицательно определена.
3. При каких значениях λ квадратичная форма $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+x_3^2+2\lambda x_1x_2+10x_1x_3+6x_2x_3$ положительно определена, отрицательно определена.

Форма контроля – контрольная работа

Примерные варианты котрольных работ

Контрольная работа №1.

1. Найти z_1z_2, $\dfrac{z_1}{z_2}$, $\dfrac{z_1-\overline{z_2}}{z_1+\overline{z_2}}$, где $z_1=n+i$, $z_2=1+ni$, n --- номер варианта.

2. Изобразить на плоскости комплексные числа z_1, z_2, $\overline{z_1}$, $\overline{z_2}$, $z_1-\overline{z_2}$, $z_1+\overline{z_2}$, где z_1, z_2 – числа из задачи 1.

3. Вычислить: $\sqrt[3]{2-i\sqrt{12}}$.

4. Вычислить α^{-1}, $\alpha\beta$, α^{100n}, где: $\alpha,\beta\in S_8$ – некоторые подстановки.

5. Вычислить $AA^{\top}$ и $f(B)$, где $f(x)=x^2-2X+1$, а A,B – заданные матрицы второго порядка.

Контрольная работа №2.

1. Вычислить произведение подстановок и разложить его в произведение независимых циклов и произведение транспозиций: $(1,2,5,6,9)(2,3,4,5,9)(5,6,7,8,9)$.

2. Вычислить AB и BA, где $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \\ 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

3. Выбрать i, j, k так, чтобы произведение $a_{2i}a_{44}a_{j5}a_{5k}a_{12}a_{64}$ входило в развернутое выражение определителя шестого порядка со знаком минус.

4. Вычислите определитель данной матрицы.

5. Найти матрицу, обратную к заданной матрице.

Контрольная работа №3.

1. Найти фундаментальную систему решений и общее решение системы уравнений $AX=0$, где $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

2. Найти базис суммы и пересечения подпространств, натянутых на системы векторов $a_1 := [10,17,-3,11], a_2 := [5,12,-8,6], b_1 := [-1,-2,-3,-2], b_2 := [1,0,-1,0]$.

3. Выяснить, является ли подпространством соответствующего векторного пространства следующая совокупность векторов: последовательности вещественных чисел, имеющие предел: 1) 0; 2) $a \neq 0$.

4. Является ли следующая система функций линейно независимой: $\sin x, \sin(x+1), \sin x + 2$?

5. При каких значениях x ранг матрицы $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & x & -2 \\ 3 & -6 & -3 \end{pmatrix}$ равен: а) 1; б) 2.

Контрольная работа №4.

1. Как изменится матрица линейного оператора, если в базисе $e_1, \dots, e_n$ вектор e_1 заменить на $e_1 + e_2$?

2. Выяснить, является ли матрица $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ диагонализируемой.

3. Доказать, что преобразование $f: M_2(\mathbb{C}) \to M_2(\mathbb{C})$, $f(X) = AX$, где A --- фиксированная матрица, является линейным. Найти матрицу f, а также собственные векторы, собственные значения и (по возможности) инвариантные подпространства f в случае, когда $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Найти жорданову нормальную форму матрицы A^2, где $A = diag(J_3(0), J_3(0))$.

Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины (эвристический, проектный, практико-ориентированный)

При организации образовательного процесса используется ***эвристический подход,*** который предполагает**:**

– осуществление студентами личностно-значимых открытий окружающего мира;

– демонстрацию многообразия решений большинства профессиональных задач и жизненных проблем;

– творческую самореализацию обучающихся в процессе создания образовательных продуктов;

– индивидуализацию обучения через возможность самостоятельно ставить цели, осуществлять рефлексию собственной образовательной деятельности.

При организации образовательного процесса используется ***практико-ориентированный подход,*** который предполагает***:***

– освоение содержание образования через решения практических задач;

– приобретение навыков эффективного выполнения разных видов профессиональной деятельности;

– ориентацию на генерирование идей, реализацию групповых студенческих проектов, развитие предпринимательской культуры;

– использованию процедур, способов оценивания, фиксирующих сформированность профессиональных компетенций.

При организации образовательного процесса ***используется метод проектного обучения,*** который предполагает***:***

– способ организации учебной деятельности студентов, развивающий актуальные для учебной и профессиональной деятельности навыки планирования, самоорганизации, сотрудничества и предполагающий создание собственного продукта;

– приобретение навыков для решения исследовательских, творческих, социальных, предпринимательских и коммуникационных задач.

Методические рекомендации по организации и выполнению самостоятельной работы студентов

Самостоятельная работа студентов - это любая деятельность, связанная с воспитанием мышления будущего профессионала. В широком смысле под самостоятельной работой следует понимать совокупность всей самостоятельной деятельности студентов как в учебной аудитории, так и вне её, в контакте с преподавателем и в его отсутствии.

Самостоятельная работа реализуется:

1. Непосредственно в процессе аудиторных занятий - на лекциях.

2. В контакте с преподавателем вне рамок расписания - на консультациях по учебным вопросам, в ходе творческих контактов, при ликвидации задолженностей, при выполнении индивидуальных заданий и т.д.

3. В библиотеке, дома, в общежитии, на кафедре при выполнении студентом учебных и творческих задач.

При изучении дисциплины организация самостоятельной работы студентов должна представлять единство трех взаимосвязанных форм:

1. Внеаудиторная самостоятельная работа;

2. Аудиторная самостоятельная работа, которая осуществляется под непосредственным руководством преподавателя;

3. Творческая, в том числе научно-исследовательская работа.

Примерный перечень вопросов к экзамену

1 семестр

1. Свойства делимости целых чисел. Теорема о делении с остатком. НОД целых чисел. Алгоритм Евклида.
2. Теорема о представлении НОД целых чисел в виде целочисленной линейной комбинации. Нахождение НОД нескольких целых чисел.
3. Алгебраическая операция, ее свойства. Теоремы о нейтральном и обратном элементе.
4. Группа, кольцо, поле. Определения и примеры.
5. Определение комплексных чисел, операции сложения и умножения и их свойства. Алгебраическая форма комплексных чисел.
6. Операция сопряжения комплексных чисел и ее свойства.
7. Комплексная плоскость, тригонометрическая форма комплексных чисел. Модуль комплексного числа, его свойства.
8. Умножение комплексных чисел в тригонометрической форме. Формула Муавра.
9. Геометрическая интерпретация действий над комплексными числами.
10. Извлечение корней из комплексных чисел.
11. Корни из единицы. Первообразные корни из единицы и их свойства.
12. Определения перестановок и подстановок, их число. Транспозиции и циклы. Четность перестановки.
13. Теорема о характере четности перестановки после применения к ней транспозиции.
14. Умножение подстановок. Симметрическая группа.
15. Разложение подстановки в произведение транспозиций. Разложение подстановки в произведение независимых циклов.
16. Матрицы и действия над ними. Умножение матрицы на число и его свойства.
17. Свойства сложения матриц. Операция транспонирования и ее свойства.
18. Свойства умножения матриц.
19. Определители. Теорема о замене строк в определителе.
20. Свойства определителей порядка n.
21. Теорема об определителе произведения матриц.
22. Миноры и алгебраические дополнения. Теорема Лапласа.
23. Теорема о разложении определителя по строке.
24. Обратная матрица. Критерий существования и методы вычисления.
25. Системы линейных уравнений. Метод Крамера.

26. Кольцо многочленов от одной переменной. Степень многочлена и ее свойства.
27. Теорема о делении многочленов с остатком.
28. Делимость многочленов и ее свойства. НОД многочленов. Алгоритм Евклида.
29. Неприводимые многочлены и их свойства. Разложение многочлена на неприводимые множители.
30. Корни многочленов. Теорема Безу и ее следствия. Кратные корни.
31. Схема Горнера.
32. Неприводимые многочлены над *C* и R. Каноническое разложение многочленов из C[x] и R[x].

2 семестр

1. Векторные пространства. Определение и примеры. Простейшие свойства векторных пространств.
2. Линейная зависимость и линейная независимость. Свойства линейной зависимости.
3. Базис векторного пространства. Примеры.
4. Размерность векторного пространства. Свойства n-мерных векторных пространств.
5. Координаты вектора. Изменение координат вектора при изменении базиса. Матрица перехода.
6. Подпространства векторного пространства. Примеры
7. Операции над подпространствами. Размерности суммы и пересечения подпространств.
8. Прямая сумма подпространств. Критерии. Прямое дополнение.
9. Базис и ранг системы векторов. Ранг матрицы.
10. Ранг произведения двух матриц. Методы вычисления ранга матрицы.
11. Критерий совместности системы линейных уравнений.
12. Однородные системы линейных уравнений. Фундаментальная система решений.
13. Линейные отображения. Примеры. Простейшие свойства линейных отображений.
14. Действия над линейными отображениями.
15. Матрица линейного оператора. Матрица суммы и произведения операторов.
16. Изменение матрицы линейного оператора при переходе к новому базису.
17. Ядро и образ и линейного отображения. Теорема о ранге и дефекте.
18. Инвариантные подпространства. Определение и примеры. Инвариантные подпространства и матрица линейного оператора.

19. Собственные векторы и собственные значения. Определения и примеры. Нахождение собственных значений.
20. Теорема Гамильтона – Кэли. Минимальный полином матрицы и оператора.
21. Определение жордановой нормальной формы. Нахождение ЖНФ матрицы.
22. Билинейные формы. Примеры. Матрица билинейной формы. Симметрические билинейные формы и их матрицы.
23. Теорема об изменении матрицы билинейной формы при переходе к другому базису. Ранг билинейной формы и его независимость от выбора базиса.
24. Квадратичные формы. Полярная билинейная форма для данной квадратичной формы. Теорема о существовании и единственности полярной билинейной формы
25. Матрица квадратичной формы. Изменение матрицы квадратичной формы при переходе к другому базису. Ранг квадратичной формы и его независимость от выбора базиса.
26. Канонический базис относительно билинейной (квадратичной) формы и канонический вид билинейной (квадратичной) формы. Матрица билинейной (квадратичной) формы в каноническом базисе. Алгоритм Лагранжа.
27. Нормальный вид комплексной и действительной квадратичный формы.
28. Закон инерции действительных квадратичных форм. Положительный и отрицательный индексы инерции.
29. Знакоопределенные квадратичные формы. Канонический вид положительно (отрицательно) определенной квадратичной формы. Критерий Сильвестра.

Примерный перечень вопросов к зачету

На зачете по дисциплине «Алгебра» студент должен продемонстрировать умение решать следующие задачи и объяснять свои действия с точки зрения теории.

1 семестр

1. Найти НОД (НОК) целых чисел с помощью алгоритма Евклида.
2. Комплексное число представить в тригонометрической форме.
3. Изображать на комплексной плоскости комплексные числа и множества комплексных чисел, заданные их свойствами.
4. Осуществлять действия над комплексными числами: сложение, умножение, возведение в степень, извлечение корня.
5. Бинарная алгебраическая операция, определение группы, кольца, поля.
6. Находить количество инверсий в перестановках.
7. Перемножать подстановки. Разлагать подстановку в произведение транспозиций и независимых циклов.
8. Считать простейшие определители по определению.

9. Пользуясь теоремой Лапласа, раскладывать определитель по одной или нескольким строкам (столбцам).
10. Вычислять числовые определители.
11. Решать системы линейных уравнений методом Гаусса.
12. Выполнять действия с матрицами. Находить обратную матрицу (два способа).
13. Решать крамеровские системы линейных уравнений.
14. Найти НОД (НОК) полиномов из $P[x]$.

2 семестр

1. Определять линейную зависимость и линейная независимость системы векторов.
2. Находить базис системы векторов и базис векторного пространства.
3. Находить координаты вектора в заданном базисе.
4. Находить матрицу перехода между базисами.
5. Уметь определять, является ли некоторое подмножество векторного пространства подпространством.
6. Вычислять ранг системы векторов и ранг матрицы
7. Знать и уметь применять критерий совместности системы линейных уравнений.
8. Уметь находить фундаментальную систему решений системы однородных линейных уравнений.
9. Уметь определять линейность отображения.
10. Уметь вычислить матрицу линейного оператора.
11. Уметь находить собственные векторы и собственные значения матрицы и линейного оператора.
12. Найти матрицу билинейной и квадратичной формы в разных базисах.
13. С помощью алгоритма Лагранжа найти канонический вид билинейной и квадратичной формы.
14. Привести вещественную и комплексную квадратичную форму к нормальному виду.
15. Найти положительный и отрицательный индексы инерции, сигнатуру квадратичной формы.
16. Применять критерий Сильвестра для выяснения знакоопределенности квадратичной формы.
17. Уметь вычислить скалярное произведение векторов, длину векторов, угол между векторами.

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УВО

-

Название дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы по изучаемой учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
Аналитическая геометрия.	Кафедра геометрии и методики преподавания математики	нет	Вносить изменения не требуется (протокол № 11 от 22.05.2020)
Теория функций комплексного переменного.	Кафедра теории функций	нет	Вносить изменения не требуется (протокол № 11 от 22.05.2020)
Математический анализ	Кафедра теории функций	нет	Вносить изменения не требуется (протокол № 11 от 22.05.2020)
Функциональный анализ	Кафедра функциональн ого анализа	нет	Вносить изменения не требуется (протокол № 11 от 22.05.2020)

ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ ПО ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ

на _____/_____ учебный год

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры высшей алгебры и защиты информации (протокол № ____ от ________ 20__ г.)

Заведующий кафедрой

_______________________ _________________ _________________________

(степень, звание) (подпись) (И.О.Фамилия)

УТВЕРЖДАЮ

Декан факультета

_______________________ _________________ _________________________

(степень, звание) (подпись) (И.О.Фамилия)