деления (ф. р.) времен пребывания заявок типа j в системах сети при последовательном обслуживании в них, $j = \overline{1, n+r}$; $W_i(t), A(t), G(t)$ – ф. р. соответственно величин w_j, ξ, $a(m, 1)$, а $\beta_j(s)$, $\omega_j(s)$, $\alpha(s)$, $g(s)$ – преобразования Лапласа – Стилтьеса этих ф. р.

Времена обслуживания заявок не зависят от их типов. Учитывая это и известный результат [2], в качестве оценки величины w_j можно взять время ожидания заявки в системе М|Д|1 с параметром входящего потока, равным λ, и постоянным временем обслуживания, равным $a = \max[a_1, a_2, ..., a_m]$. Согласно [3], преобразование Лапласа – Стилтьеса этой величины имеет вид:

$$\omega_j(s) = \frac{(1-\lambda a)se^{sa}}{(s-\lambda)e^{sa}+\lambda},$$

таким образом,

$$\beta_j(s) = \omega_j(s)g(s) = \frac{(1-\lambda a)se^{s(a-a(m,1))}}{(s-\lambda)e^{sa}+\lambda}.$$

Когда заявка направляется в систему s_1, возможно одно из двух событий: либо эта заявка типа j, $j = 1 \vee 2 \vee ... \vee n$, либо типа i, $i = n+1 \vee n+2 \vee ... \vee n+r$. В первом случае $\alpha(s) = \beta_j(s)$. Во втором случае время ξ состоит из трех промежутков: первый – время пребывания заявки типа i в сети при последовательном обслуживании в ее системах, второй – время освобождения систем $s_m, s_{m-1}, ..., s_k$ от заявок, равное τ_k, третий – время обслуживания в этих освобожденных системах связанной с ней заявки, равное $a(m, k)$, $k = 1 \vee 2 \vee ... \vee m$, поэтому имеет место следующая

Теорема. Пусть R_1 – наибольшее целое число, не превосходящее $[t - a(m, 1)]a^{-1}$, $R_2(k)$ – наибольшее целое число, не превосходящее $[t - \tau_k - a(m, k) - a(m, 1)]a^{-1}$. Тогда

$$\alpha(s) = \sum_{j=1}^{n} p_j\beta_j(s) + \sum_{i=1}^{r} p_{n+i}\beta_{n+i}(s)\sum_{k=1}^{m} q_{(n+i)k}\, e^{-s(\tau_k + a(m,k))},$$

$$M\xi = a(m, 1) + \frac{\lambda a^2}{2(1-\lambda a)} + \sum_{i=1}^{r} p_{n+i}\sum_{k=1}^{m} q_{(n+i)k}[\tau_k + a(m, k)],$$

$$A(t) = (1-\lambda a)\Big\{\sum_{j=1}^{n} p_j \sum_{i=1}^{R_1} \frac{[-\lambda(t-a(m,1)-ia)]^i}{i!} e^{\lambda[t-a(m,1)-ia]} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{r} p_{n+j}\sum_{k=1}^{m} q_{(n+j)k}\sum_{i=0}^{R_2(k)} \frac{[-\lambda(t-a(m,k)-a(m,1)-ia)]^i}{i!} \times$$

$$\times e^{\lambda[t-\tau_k-a(m,k)-a(m,1)-ia]}\Big\}.$$

Список литературы

1. К о у г и П. М. Архитектура конвейерных ЭВМ. М., 1985.
2. В и н о г р а д о в О. П.//Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1984. № 3. С. 162.
3. К л е й н р о к Л. Теория массового обслуживания. М., 1979.

Поступила в редакцию 05.03.92.

УДК 62-504 (047)

В. В. ИГНАТЕНКО, В. В. КРАХОТКО

К УПРАВЛЯЕМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ ДЕСКРИПТОРНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

In this paper we study the controllability of linear discrete degenerate dynamical systems. The controllability criterion of this systems is proved.

Рассмотрим линейную дискретную систему

$$A_0x(t+1)=A_1x(t)+Ax(t-h)+Bu(t),\ t=1,\ 2,...,\tag{1}$$

$$x_0(.)=\{x(\tau)=q_\tau,\ \tau=-h,\ -h+1,\ ...,\ 0\},$$

где x – n-вектор, u – r-вектор (управление), A_0, A_1, A, B – постоянные матрицы соответствующих размеров, $h(h>1)$ – натуральное число (запаздывание).

При $\det A_0\neq 0$ система (1) изучалась в работе [1]. Здесь рассмотрим случай, когда $\det A_0=0$. Для простоты исследуем (1) при $A_1=0$. Если предположить, что пучок матриц λA_0-A регулярный, т. е. $\det(\lambda A_0-A)\not\equiv 0$, то систему (1) можно привести к такому виду, что выполняются условия [2]:

$$A_0A=AA_0,\ \ker A_0\cap\ker A=\{0\}.\tag{2}$$

Определение 1. Обратной матрицей Драйзина [2] к любой квадратной матрице A_0 называется матрица A^D_0, которая удовлетворяет системе уравнений:

$$A_0^DA_0=A_0A_0^D;\ A_0^DA_0A_0^D=A_0^D;\ A_0^DA_0^{k_0+1}=A_0^{k_0},$$

где $k_0=\mathrm{ind}A_0$ – индекс матрицы A_0 (наименьшее неотрицательное число такое, что $\mathrm{rank}A_0^{k_0+1}=\mathrm{rank}A_0^{k_0}$).

Укажем некоторые свойства обратных матриц Драйзина [2].

Если выполняются условия (2), тогда справедливы соотношения: $A_0^DA=AA_0^D$; $A_0A_0^D=A^DA_0$; $A_0^DA^D=A^DA_0^D$; $(E-A_0^DA_0)^i=E-A_0^DA_0$, $i>1$.

Для любой матрицы A_0 индекса k_0 существуют единственные матрицы M, N такие, что $A_0=M+N$, причем $\mathrm{ind}\ M=0$ или 1, а N – нильпотентная матрица индекса нильпотентности k_0, причем $MN=NM=0$, $M=A_0^2A_0^D$, $N=A_0(E-A_0^DA_0)$.

В случае $A_1=0$ система (1) принимает вид:

$$A_0x(t+1)=Ax(t-h)+Bu(t),\ t=1,\ 2,\ ...\tag{3}$$

Решение $x(t)$, $t\geq 0$, системы (3) будем искать в виде: $x(t)=x_1(t)+x_2(t)$, где $x_1(t)=A_0^DA_0x(t)$, $x_2(t)=(E-A_0^DA_0)x(t)$.

Умножая обе части системы (3) слева на A^D_0, получим:

$$A_0^DA_0x(t+1)=A_0^DAx(t-h)+A_0^DBu(t)=$$

$$=A_0^DAA_0^DA_0x(t-h)+A_0^DBu(t)\tag{4}$$

или

$$x_1(t+1)=A_0^DAx_1(t-h)+A_0^DBu(t).$$

Аналогично, умножая систему (3) слева на $A^D(E-A^D_0A_0)$, получим

$$A^DA_0(E-A_0^DA_0)x_2(t+1)=x_2(t-h)+(E-A_0^DA_0)A^DBu(t).\tag{5}$$

Легко показать, что система (4) имеет единственное решение, удовлетворяющее начальному условию

$$\Omega(.)=\Omega=\{x(\tau)=q'=A_0^DA_0z'-$$

$$-(E-A_0^DA_0)\sum_{j=0}^{k_0-1}(A_0^DA_0)^jA^DBu(\tau+jh),\ \tau=\overline{-h,\ 0};\ q'\in R^n\},$$

$$x_1(t)=(A_0^DA)^{d_t}A_0^DA_0z_{t-d_t}(h+1)+$$

$$+\sum_{s=1}^{d_t}(A_0^DA)^{s-1}A_0^DBu(t-(s-1)(h+1)-1),$$

$$\Omega=\{x(\tau)=q_\tau=A_0^DA_0z_\tau-$$

$$-\left(E-A_0^DA_0\right)\sum_{j=0}^{k_0-1}\left(A_0^DA_0\right)^jA^DBu(\tau+jh),\ \tau=\overline{-h,\ 0}\ \},$$

где $d_t=\left[\frac{t-1}{h+1}\right]+1,\ z_\tau\in R_n$.

Найдем решение уравнения (5). Заменяя в (5) $t-h=s$ и, возвращаясь к переменной t, получим

$$x_2(t)=A_0^DA_0\left(E-A_0^DA_0\right)x_2(t+1)-\left(E-A_0^DA_0\right)A^DBu(t+h)=$$

$$=A_0A^D\left(E-A_0^DA_0\right)\left(A^DA_0\left(E-A_0^DA_0\right)x_2(t+2h+1)-\right.$$

$$\left.-\left(E-A_0^DA_0\right)A^DBu(t+2h)\right)-\left(E-A_0^DA_0\right)A^DBu(t)=\ldots=$$

$$=\left(A^DA_0\right)^i\left(E-A_0^DA_0\right)x_2(t+ih+1)-\left(E-A_0^DA_0\right)\times$$

$$\times\sum_{j=1}^{i}\left(A^DA_0\right)^{i-1}A^DBu(t+jh).$$

Поскольку $\left(A_DA_0\right)^{k_0}\left(E-A_0^DA_0\right)=0$, то имеем

$$x_2(t)=-\left(E-A_0^DA_0\right)\sum_{j=1}^{k_0-1}\left(A^DA_0\right)^jA^DBu(t+jh).$$

Для удобства записи решения по уравнениям (4) и (5) введем в рассмотрение определяющие уравнения [1]:

$$X_{t+1}^1=A_0^DAX_{t-h}^1+A_0^DBU_t,\tag{6}$$

$$A^DA_0\left(E-A_0^DA_0\right)X_{t+1}^2=X_{t-h}^2+A^D\left(E-A_0^DA\right)BU_t,\ t=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots,\tag{7}$$

которые будем решать при условиях

$$U_0=E;\ U_t\equiv0,\ t\neq0;\ X_t^1\equiv0,\ t\leq0;\ X_t^2\equiv0,\ t\geq1.$$

Обозначим через X^0_t решение уравнения (6) при начальных условиях $U_t=0,\ \forall t;\ X^1_0=A^D_0A_0;\ X^1_t\equiv0,\ t<0$.

Тогда в терминах решений определяющих уравнений решение $x(t)$, $t>0$, системы (3) с начальными условиями $x_0(.)\in\Omega$ запишется в виде:

$$x(t)=X_{d_t}^0z_{t-d_t}(h+1)+\sum_{s=1}^{d_t}X_s^1u(t-(s-1)(h+1)-1)+$$

$$+\sum_{j=0}^{k_0-1}X_{-j}^2u(t+jh).\tag{8}$$

Определение 2. Систему (3) назовем условно управляемой, если для любых начального условия $x_0(\cdot)\in\Omega$ и $c\in R^n$ существуют момент времени $t_1>(k_0-1)h$ и управление $u(t)$, $t=(k_0-1)h+1,\ (k_0-1)h+2,\ \ldots,\ t_1+(k_0-1)h$ такие, что решение системы удовлетворяет условию $x(t_1)=c$.

Определение 3. Систему (3) назовем управляемой из нуля, если для $\forall z_\tau,\ c\in R^n$, существуют момент времени $t_1<+\infty$ и управление $u(t)$, $t=0,\ 1,\ \ldots,\ t_1+(k_0-1)h$, такие, что решение системы удовлетворяет условиям: $x(\tau)=0$ для $\tau=\overline{-h,\ 0}$ и $x(t_1)=c$.

Из представления (8) решения $x(t)$, $t>0$, дискретной дескрипторной системы (3) и приведенных выше определений вытекают следующие утверждения:

Для условной управляемости системы (3) необходимо и достаточно, чтобы

$$\operatorname{rank}\left\{X_s^1,\ s=1,\ 2,\ \ldots,\ d_{t_1}-d_{k_0h+1};\ X_{-j}^2,\ j=0,\ 1,\ \ldots,\ k_0-1\right\}=n.$$

Для управляемости системы (3) из нуля необходимо и достаточно, чтобы

$$\operatorname{rank}\left\{X_{-j}^2,\ j=0,\ 1,\ \ldots,\ k_0-1\right\}=\operatorname{rank}\left\{X_{-j}^2,\ j=0,\ 1,\ \ldots,\ k_0-1;\ X_0^0\right\},$$

$$\mathrm{rank}\{X_s^1,\ s=1,\ 2,\ \ldots,\ d_{t_1}-d_{k_0n+1};\ X_{-j}^2,\ j=0,\ 1,\ \ldots,\ k_0-1\}=n.$$

Учитывая специфику начальных условий для системы (3), можно рассматривать и другие виды управляемости [3].

Список литературы

1. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Крахотко В. В., Минюк С. А.//Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8. № 5, 6, 7. С. 767, 1081, 1283.
2. Campbell S. L., Meyer C. D.//Generalired Inverses of Linear Transformations. Pitman. London, 1979.
3. Игнатенко В. В., Крахотко В. В.//Актуальные задачи теории динамических систем управления. Мн., 1989.

Поступила в редакцию 17.03.92.

УДК 519.62

В. В. БОБКОВ, Е. Б. СОНЕЦ

АДАПТИВНЫЕ МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЖЕСТКИХ СИСТЕМ, ОСНОВАННЫЕ НА ЧЕБЫШЕВСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ СПЕКТРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

Applying Chebyshev's approximation technique new explicit methods for the numerical solution of initial value problem for linear stiff systems of ordinary differential equations are derived, possessing properties of improved correspondence between differential and difference problems being valid only for those components of the solution which are not negligible.

Рассматривается задача Коши

$$u'=Au+b,\ u(t_0)=u^0, \tag{1}$$

где A – постоянная матрица размерности $m\times m$, имеющая отрицательный вещественный спектр и m линейно независимых собственных векторов, $b=(b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_m)^T$ – постоянный вектор.

Точное решение задачи (1), как известно, представимо в виде

$$u(t)=\sum_{i=1}^{m} c_i\xi^i\exp(\lambda_i t)-A^{-1}b, \tag{2}$$

где $\xi^i=(\xi^i_1,\ \xi^i_2,\ \ldots,\ \xi^i_m)^T$, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ m$, – ортонормированный базис системы собственных векторов матрицы A, $\lambda_1\geq\lambda_2\geq\ldots\geq\lambda_m$ – собственные числа матрицы A, c_i – константы, зависящие от u^0.

Сумма в правой части соотношения (2) представляет собой линейную комбинацию гармоник $\gamma^i(t)=\xi^i\exp(\lambda_i t)$, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ m$, вносящих при большом разбросе спектра неравнозначный вклад в решение. Для рассматриваемой траектории условимся называть «выгоревшими» в момент времени t те гармоники, для которых слагаемое $c_i\gamma^i(t)$ не наблюдаемо в пределах заданной точности, а «невыгоревшими» – все остальные. Введем в рассмотрение также переменную Λ – границу, разделяющую «выгоревшую» и «невыгоревшую» части спектра исходной матрицы на данном решении.

Будем строить численный метод для решения задачи (1) в виде

$$\hat{y}=Sy+g\ (S\xi^i=s_i\xi^i,\ y\approx u(t),\ \hat{y}\approx u(t+\tau),\ \tau>0).$$

Если приближенное решение в точке t совпадает с точным, то $\hat{y}$ представимо в виде

$$\hat{y}=\sum_{i=1}^{m} c_i\xi^i\exp(\lambda_i t)s_i-SA^{-1}b+g. \tag{3}$$

Сопоставляя (3) и (2) в момент времени $t+\tau$, несложно заметить, что s_i представляют собой аналоги $\exp(\lambda_i\tau)$, а выражение $-SA^{-1}b+g$ служит приближением вектора $-A^{-1}b$ – положения равновесия исходной системы. Поэтому процесс численного решения задачи (1) на каждом шаге τ при сохранении методом положения равновесия сводится к моделированию величин $\exp(\lambda_i\tau)$ с помощью s_i [1].

Назовем $\exp(x)$ спектральной функцией системы $u'=Au+b$. Каждый численный метод реализует некоторое приближение $E(x)$ к $\exp(x)$, однозначно определяющее его порядок точности и область устойчивости.