УДК 517.977

В. В. АЛЬСЕВИЧ

КОНЕЧНЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

An algorithm of constructing the optimal program control is suggested for the optimal control problem with linear dynamical retarded system and terminal restrictions.

1. Динамические системы с последействием являются одним из актуальных обобщений обыкновенных систем [1]. К настоящему времени многие вопросы, решенные для обыкновенных динамических систем, достаточно полно исследованы и для систем с последействием [2–4]. Однако в силу принципиальных отличий между двумя типами систем ряд проблем оптимизации систем с последействием остается еще мало изученным. В большой степени это относится к конструктивным аспектам теории [2,5]. В данной работе излагается подход, основанный на методе опорных задач, разработанном для обыкновенных динамических систем [6]. Излагается конечный алгоритм построения оптимального программного управления для систем с последействием, при этом основное внимание уделяется тем особенностям, которые возникают в рассматриваемой задаче по сравнению с обыкновенными системами.

2. В классе кусочно-непрерывных функций $u(t)$, $t\in T=[0,t^*]$, рассмотрим следующую задачу оптимального управления:

$$J(u)=h_0'x(t^*)\to\max, \qquad (1)$$

$$\dot x(t)=A_0x(t)+A_1x(t-\theta)+bu(t),\ t\in T, \qquad (2)$$

$$x(t)=\begin{cases} x_0(t), & -\theta\le t<0,\\ x_0, & t=0,\end{cases} \qquad (3)$$

$$Hx(t^*)=g, \qquad (4)$$

$$|u(t)|\le 1,\ t\in T. \qquad (5)$$

Здесь: $x\in R^n$, $u\in R$, $g\in R^m$, $\operatorname{rank}H=m$, $x_0(t)$, $t\in[-\theta,0[$, – кусочно-непрерывная функция, t^* – фиксированный момент времени. Понятия допустимого и оптимального управлений традиционны [6].

В эквивалентной функциональной форме задача (1) – (5) может быть записана следующим образом:

$$J(u)=\int_0^{t^*} h_0'(t)bu(t)dt\to\max,$$

$$\int_0^{t^*} H(t)bu(t)dt=\bar g,\ |u(t)|\le 1,\ t\in T,$$

где

$$\bar g=g-H(0)x_0-\int_{-\theta}^{0} H(t+\theta)A_1x_0(t)dt,\ H(t)=\left|\begin{matrix} h_i'(t)\\ \overline{i=1,m}\end{matrix}\right|,$$

$h_i(t)$, $i=\overline{0,m}$, $t\in T$, – решение уравнения

$$\dot h_i(t)=-A_0'h_i(t)-A_1'h_i(t+\theta),\ t\in T,\ h_i(t^*)=h_i,\ h_i(t)=0,\ t>t^*, \qquad (6)$$

h_i, $i=\overline{1,m}$, – i-я строка матрицы H.

3. Совокупность моментов времени $T_{оп}=\{t_j\in T,\ i=\overline{1,m}\}$ назовем опорой задачи (1) – (5), если не вырождена матрица $P(\det P\neq 0)$: $P=(H(t)b,\ t\in T_{оп})$. Пара $\{u(.),\ T_{оп}\}$ из допустимого управления $u(.)=(u(t),\ t\in T)$ и опоры $T_{оп}$ называется опорным управлением. Опорное управление в задаче (1) – (5) считается невырожденным, если управление $u(t)$, $t\in T$, в опорные моменты некритическое: $|u(t)|<1$, $t\in T_{оп}$.

Можно доказать следующее утверждение:

Теорема 1. В задаче (1) – (5) опора существует тогда и только тогда, когда система (2), (3) управляема относительно ограничения (4).

Введем обозначения:

$$c'_{оп} = (h'_0(t)b,\ t\in T_{оп}),\ \nu' = c'_{оп}P^{-1},\ \psi(t),\ t\in T,$$

– решение уравнения

$$\dot\psi(t) = -A'_0\psi(t) - A'\psi_0(t+\theta),\ t\in T,\ \psi(t^*) = h_0 - H'\nu,\ \psi(t)\equiv 0,\ t>t^*, \quad (7)$$

$$\Delta(t) = \psi'(t)b,\ t\in T,\ H(x,\ y,\ \psi,\ u) = \psi'(A_0x + A_1y + bu),\ y(t) = x(t-\theta).$$

Вектор ν назовем вектором потенциалов, функцию $\Delta(t)$, $t\in T$, – коуправлением, вектор-функцию $\psi(t)$, $t\in T$, – котраекторией, сопровождающей опору $T_{оп}$, систему (7) – сопряженной системой. Заметим, что из определения коуправления следует: $\Delta(t) = 0$, $t\in T_{оп}$.

4. Справедлива

Теорема 2 (опорный принцип максимума). Для оптимальности опорного управления $\{u(.),\ T_{оп}\}$ достаточно, а в случае его невырожденности и необходимо, чтобы выполнялось условие максимума

$$H(x(t),\ y(t),\ \psi(t),\ u(t)) = \max_{|u|\leq 1} H(x(t),\ y(t),\ \psi(t),\ u),\ t\in T, \quad (8)$$

где $\psi(t)$, $t\in T$, – котраектория, сопровождающая опору $T_{оп}$ (решение сопряженной системы (7)).

5. Основная цель каждого конструктивного подхода – организация процесса построения решения задачи. Пусть $\{u(.),\ T_{оп}\}$ – текущее опорное управление, на котором не выполняется принцип максимума. Итерацией метода назовем замену $\{u(.),\ T_{оп}\}\to\{\bar u(.),\ \bar T_{оп}\}$. Указанную замену осуществим с помощью двух процедур: 1) процедуры ФАРОЗ (формирования и анализа решения опорных задач) и 2) процедуры доводки. Первая процедура практически не отличается от аналогичной для обыкновенных систем [7]. Поэтому приведем лишь основные моменты, которые потребуются в дальнейшем.

6. Из принципа максимума (8) следует, что оптимальное управление $u(t)$, $t\in T$, в задаче (1) – (5) имеет вид: $u(t) = \mathrm{sign}\Delta(t)$, $t\in T$. Поэтому процедуру ФАРОЗ начнем с построения сопровождающих опору $T_{оп}$ коуправления $\Delta(t)$, $t\in T$, и квазиуправления $\omega(t):\omega(t) = \mathrm{sign}\Delta(t)$, $t\in T$. Новое управление $\bar u(t)$, $t\in T$, строим в виде:

$$\bar u(t) = u(t) + \theta_k l(t),\ t\in T_k,\ k\in K = \{1,\ \ldots,\ N\}, \quad (9)$$

где $l(t) = \omega(t) - u(t)$, $t\in T$; T_k, $k\in K$, – отрезки, покрывающие промежуток $T: T_k\cap T_j = \phi,\ k\neq j,\ \bigcup_{k\in K} T_k = T$. Отрезки T_k, $k\in K$, строим специальным образом, исходя из нулей коуправления $\Delta(t)$, $t\in T$, и параметра метода h. Введем обозначения:

$$\alpha_k = \int_{T_k} h'_0(t)bl(t)dt,\ a_k = \int_{T_k} H(t)bl(t)dt,\ k\in K.$$

Задачу линейного программирования

$$\sum_{k\in K}\alpha_k\theta_k\to\max,\ \sum_{k\in K} a_k\theta_k = 0,\ 0\leq\theta_k\leq 1,\ k\in K, \quad (10)$$

назовем опорной задачей. Ее цель состоит в поиске таких перемещений фрагментов старого управления, при которых функция $\bar u(t)$, $t\in T$, оставалась бы допустимым управлением, а приращение $J(\bar u) - J(u)$ критерия качества (1) задачи (1) – (5) было максимальным.

Для задачи (10) разработаны эффективные алгоритмы [8]. Анализ решения задачи (10) и ее корректировка осуществляется аналогично обыкновенным системам [7]. Через конечное число корректировок опорной задачи (10) будет построен оптимальный опорный план $\{\theta^0,\ K^0_{оп}\}$. С его помощью построим новое допустимое управление (9), где $\theta_k = \theta^0_k$, $k\in K$. В качестве новой опоры $\bar T_{оп}$ можно в общем случае выбирать множество $\bar T_{оп} = \{t_k,\ k\in K^0_{оп}\}$, где t_k – любая точка отрезка T_k, $k\in K^0_{оп}$ (для определенности будем брать левый конец отрезка T_k). В качестве нового вектора потенциалов $\bar{\nu}$ задачи (1) – (5) возьмем вектор потенциал последней опорной задачи (10). По вектору $\bar{\nu}$ легко построить нов коуправление $\Delta(t)$, $t \in T$, решив систему (7) при $\nu = \bar{\nu}$.

Очевидно, нули коуправления $\Delta(t)$, $t \in T$, будут лежать на отрезках для которых $\Delta_k = 0$. Таким образом, решая опорную задачу, мож локализовать нули оптимального коуправления на отрезках любой н перед заданной длины h. Точные значения нулей коуправления и векто потенциалов находим с помощью процедуры доводки.

7. На доводку подается совокупность нулей коуправления и вектор потенциалов, полученных в результате первой процедуры:

$$\bar{z} = (\bar{t}_i,\ i \in I;\ \nu). \tag{11}$$

Рассмотрим векторное уравнение

$$\varphi(z) = 0, \tag{12}$$

где

$$\varphi(z) = (f(z),\ q_j(z),\ j \in I),\quad f(z) = \sum_{i \in I} \omega_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} H(t)b\,dt - g,$$

$$q_i(z) = \Delta(t_j) = (h_0'(t_i) - \nu' H(t_i))b,\ \ I = \{0\} \cup I,\ \ t_0 = 0,$$

$$t_{i_{max}+1} = t^*,\ \omega_i = \operatorname{sign}\Delta(t),\ t \in [t_i, t_{i+1}].$$

Точное решение z^* задачи (1) – (5) найдем из решения уравнения (12) которое называется уравнением доводки. Последнее решаем методо Ньютона. В качестве нулевого приближения берем совокупность $\bar{z}$ (11)

Сначала рассмотрим случай, когда момент $t^* - \theta$ не принадлежит н одному из отрезков T_k, $k \in K^0 = \{k \in K : \Delta_k = 0\}$. Пусть точки t_j, $j \in I$, таковы что $\bar{\Delta}(\bar{t}_i) \neq 0$, а $\operatorname{rank} P = m$. Тогда можно показать, что матрица Якоб $G(\bar{z}) = \partial\varphi(z)/\partial z|_{z=\bar{z}}$ будет не вырождена. Последовательные приближе ния $z^{(k)}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, к решению уравнения (12) находим по правил

$$z^{(k+1)} = z^{(k)} - \begin{vmatrix} M_1^{(k)} & 0 \\ M_2^{(k)} & M_3^{(k)} \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} t^{(k)} \\ q_j^{(k)} \\ j \in I \end{vmatrix},\ k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{13}$$

где

$$f^{(k)} = f(z^{(k)}),\ q_j^{(k)} = (h_{0,j0}^{(k)\prime} - \nu^{(k)\prime} H_{j0}^{(k)})b,$$

$$M_1^{(k)} = (2\omega_{j-1} H_{j0}^{(k)} b,\ j \in I),$$

$$M_2^{(k)} = \operatorname{diag}\left((\nu^{(k)\prime}\Gamma_j^{(k)} - \gamma_j^{(k)\prime})b,\ j \in I\right),\ M_3^{(k)} = (-H_{j0}^{(k)} b,\ j \in I)', \tag{14}$$

$$\Gamma_j^{(k)} = H_{j0}^{(k)} A_0 + H_{j1}^{(k)} A_1,\ \gamma_j^{(k)\prime} = h_{0,j0}^{(k)\prime} A_0 + h_{0,j1}^{(k)\prime} A_1,$$

$$H_{js}^{(k)} = (h_{i,js}^{(k)},\ i \in I)',\ h_{i,js}^{(k)} = h_i(t_j^{(k)} + s\theta);\ i = \overline{0, m},\ s = \overline{0, p_j},\ j \in I,$$

$p_j = [(t^* - t_j)/\theta]$, $[a]$ – целая часть числа a.

Таким образом, чтобы использовать правило (13), необходимо на каждой итерации знать совокупность матриц, векторов и чисел (14), которые строятся по $h_{i,js}^{(k)}$, являющимися значениями решения системы (6) в моменты $t_j^{(k)} + s\theta$. Однако для нахождения, например, $z^{(k+2)}$ по правилу (13), используя $z^{(k+1)}$, не обязательно решать систему (6) на всем отрезке. Достаточно проинтегрировать систему

$$h_i(t) = -A_0 h_i(t) - A_1' h_i(t+\theta),\ t \in [t_j^{(k)} + s\theta,\ t_j^{(k+1)} + s\theta],$$

$$h_i(t_j^{(k)} + s\theta) = h_{i,js}^{(k)},\ h_i(t) \equiv 0,\ t > t^*,\ i = \overline{0, m},\ s = \overline{0, p_j},$$

$$\dot{s}(t) = H(t)b,\ t \in [t_i^{(k)},\ t_j^{(k+1)}],\ s(t_j^{(k)}) = 0,\ j \in I, \tag{15}$$

и положить:

$$h_{i,js}^{(k+1)} = h_i\left(t_j^{(k+1)} + s\theta\right),\ f^{(k+1)} = f^{(k)} + \sum_{j\in I}(\omega_{j-1} - \omega_j)s\left(t_j^{(k+1)}\right).$$

Если в процессе работы правила (13) за 3 – 5 итераций не устанавливается квадратичный закон сходимости, то начальное приближение $\bar{z}$ не входит в область сходимости метода Ньютона. Возвращаемся к процедуре ФАРОЗ, уменьшая величину h, положив $h = h/2$, формируем новую опорную задачу и продолжаем решение. Если достигнута требуемая точность $\|\varphi(z^{(k)})\| \le \epsilon$, где ϵ – заданное число, тогда в качестве оптимального управления берем: $u(t) = \omega_i$, $t \in [t_i^{(k)}, t_{i+1}^{(k)}[$, $i\in I$.

Пусть $t^* - \theta \in T_{k_0}$, где $k_0 \in K^0$. Поскольку функции $h_i(t)$, $i = \overline{0, m}$, в точке $t^* - \theta$ не дифференцируемы, а имеют лишь односторонние производные, то метод Ньютона может не сходиться в окрестности точки $t^* - \theta$. Укажем изменения, которые необходимо внести в решение уравнения (12).

Возможны два случая: 1) $t^* - \theta$ является левым концом отрезка T_{k_0}; 2) $t^* - \theta \in \operatorname{int} T_{k_0}$. Рассмотрим случай 1). В системе (12) заменим k_0-е уравнение на следующее: $q_{k_0}^+(z) = 0$,

где

$$q_{k_0}^+(z) = \left(h_0^{+'}(t_{k_0}) - \nu H^+(t_{k_0})\right)b;\ h_i^+(t),\ i = \overline{0, m},\ t\in T,$$

– решение уравнения:

$$h_i(t) = -A_0' h_i(t),\ t\in T,\ h_i(t^*) = h_i,\ h_i(t) \equiv 0,\ t > t^*,\ i = \overline{0, m}.$$

В случае 2) находим $\operatorname{sign}\alpha = \operatorname{sign}(\bar{\Delta}(t_{k_0}).\bar{\Delta}(t^* - \theta))$. Если $\operatorname{sign}\alpha = 1$, то поступаем аналогично, как и в случае 1). Если $\operatorname{sign}\alpha = -1$, тогда k_0-е уравнение в (12) имет вид $q_{k_0}^-(z) = 0$, а $h_i^-(t)$ является решением уравнения:

$$h_i^-(t) = -A_0 h_i^-(t) - A_1' h_i^+(t+\theta),\ t\in[t^* - 2\theta, t^*],$$

$$h_i^-(t^* - \theta) = h_i^+(t^* - \theta);\ h_i^-(t) = -A_0' h_i^-(t) - A_1' h_i^-(t+\theta),\ t < t^* - 2\theta.$$

8. Покажем, что изложенный метод конечен. Алгоритм называется конечным, если он, используя конечный объем оперативной памяти ЭВМ, с помощью конечного числа элементарных операций и интегрирований прямой и сопряженной систем на интервалах с конечной общей длиной строит решение задачи (1) – (5) любой степени точности, исходя из произвольного начального допустимого управления.

Справедливо утверждение:

Теорема 3. Метод опорных задач для решения задачи (1) – (5) конечен.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Теорема будет доказана, если доказать конечность двух процедур. Конечность процедуры ФАРОЗ повторяет доказательство для обыкновенных систем. Покажем, что процедура доводки тоже конечна. Согласно [9], можно показать: если z^* – решение уравнения (12), то существует δ_*-окрестность этого решения, что, начиная с любого приближения z из этой окрестности, метод Ньютона строит последовательность $z^{(k)}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, $z^{(0)} = \bar{z}$, приближений решения уравнения (12), причем $\|z^* - z^{(k)}\| \le 2\eta\mu^{k-1}$, где $\eta > 0$, $0 < \mu < \frac{1}{2}$, – фиксированные числа, зависящие только от элементов задачи.

Согласно п. 7, для осуществления одной итерации процедуры доводки достаточно проинтегрировать систему (15) на отрезке длины

$$\left\|\left(t_j^{(k+1)} + s\theta,\ j\in I\right) - \left(t_j^{(k)} + s\theta,\ j\in I\right)\right\| \le 2\eta\mu^{k-1},$$

$$s = \overline{0, p^0}\ \left(p^0 = \left[\frac{t^* - \bar{t}_{min}}{\theta}\right],\ \bar{t}_{min} = \min \bar{t}_j,\ j\in I\right).$$

Поскольку

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu^k = \frac{1}{1-\mu} \leq 2,$$

то для осуществления всех (бесконечного числа) итераций мето Ньютона достаточно проинтегрировать систему (15) на отрезке, дли которого не превосходит $4p^0\eta$. Теорема доказана.

Список литературы

1. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М., 1976.
2. Красовский Н. Н.//Тр. II конгр. ИФАК. М., 1965. Т. 2. С. 201.
3. Харатишвили Г. Л., Мачаидзе З. А., Маркозашвил Н. И., Тадумадзе Т. А. Абстрактная вариационная теория и ее применение оптимальным задачам с запаздыванием. Тбилиси, 1973.
4. Альсевич В. В.//Актуальные задачи теории динамических систем управлени Мн., 1989. С. 97.
5. Альсевич В. В., Габасов Р., Кириллова Ф. М.//Докл. А РФ., 1992. Т. 323. № 1.
6. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Конструктивные методы оптимизаци Ч. 2. Задачи управления. Мн., 1984.
7. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Костюкова О. И.//Докл. А СССР. 1985. Т. 280. № 3. С. 529.
8. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Костюкова О. И.//Докл. А БССР. 1981. Т. 25. № 4. С. 301.
9. Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырный П. И. Вычислительнь методы высшей математики. Т. 1. Мн., 1972.

Поступила в редакцию 30.06.92.

УДК 621.791.92

Л. М. КОЖУРО, Б. П. ЧЕМИСОВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ПОКРЫТИЯХ, ПОЛУЧЕННЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ НАПЛАВКОЙ, НА ДЕТАЛЯХ КРУГЛОЙ ФОРМЫ

In this work the method of determination of the residual stresses in electro-magneti welding coatingsis suggested.

В последние годы интенсивно развиваются новые методы нанесения покрытий, основанные на использовании концентрированных источников энергии (электрических разрядов, лазеров и др.). Перспективен метод электромагнитной наплавки (ЭМН), сущность которого состоит в электроимпульсном нанесении капель расплава ферромагнитных порошков или порошковых композиций на восстанавливаемую или упрочняемую поверхность детали в постоянном магнитном поле [1].

При рассмотрении наплавленного покрытия как сплошной среды представляют интерес остаточные напряжения первого рода, уравновешивающиеся в объеме, соизмеримом с размерами всего образца, т. е. усредненные по объему значительно большему, чем объем отдельно взятой капли расплава ферромагнитного порошка. Поэтому при рассмотрении этих величин является оправданной замена кристаллизации отдельно взятых капель модельным непрерывным процессом. Впервые такое модельное рассмотрение в рамках теории упругости было введено в работе [2], затем оно получило дальнейшее подтверждение в работах [3, 4]. При этом многие авторы определяют температурную составляющую остаточных напряжений, рассматривая окончательно сформировавшееся покрытие. В действительности же остаточные напряжения формируются при постепенном приложении нагрузки и температуры до некоторых окончательных значений.

При определении остаточных напряжений в покрытиях, полученных ЭМН, принималось, что к покрытию применимо условие сплошности, что позволяет рассматривать задачу в рамках феноменологических теорий теплообмена и механики сплошных сред. Использовалось также стандартное для такого рода задач допущение о несвязанности полей температур и напряжений [5].