

каноническим разложением $g = m \oplus h$, на котором существует нетривиальная G -инвариантная структура почти произведения, перестановочная с канонической почти комплексной структурой J [1]. G/H является локальным Φ -пространством порядка 5 тогда и только тогда, когда

$$[m_1, m_1]_2 = [m_1, m_2]_1 = [m_2, m_2]_2 = \{0\}. \quad (16)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть G/H — однородное 3-циклическое пространство и локальное Φ -пространство порядка 5. Тогда [1]

$$J_0[X, Y]_m = -[X, J_0Y]_m \quad (17)$$

для всех $X, Y \in m$. Сравнивая это равенство с (2) — (4), приходим к (16).

Обратно, пусть G/H — 3-циклическое однородное пространство и справедливы равенства (16). Тогда [1] G/H — редуктивно. В силу существования на G/H G -инвариантной нетривиальной структуры почти произведения S перестановочной с канонической почти комплексной структурой J , получаем

$$m = m_1 \oplus m_2,$$

где

$$m_i = \{X \in m \mid C_0 X = (-1)^{i+1} X\}, J_0 m_i \subset m_i, i = 1, 2.$$

Равенство (1) справедливо и для 3-циклических пространств [1]. Равенства (2) — (4) получаются из (17) с учетом (16). Теорема 3 доказана.

С л е д с т в и е. Пусть G/H — однородное Φ -пространство порядка 5, причем каноническая почти комплексная структура этого пространства является интегрируемой. Для того чтобы G/H было локальным 3-циклическим пространством [1], необходимо и достаточно, чтобы G/H было локально симметрическим.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть G/H — однородное Φ -пространство порядка 5 и локальное 3-циклическое пространство. Тогда интегрируемость канонической почти комплексной структуры эквивалентна локальной симметричности G/H [1].

Обратно, если G/H является одновременно однородным Φ -пространством порядка 5 и локально симметрическим пространством, то равенство

$$[J_0X, J_0Y]_h = [X, Y]_h, X, Y \in m$$

справедливо в силу работы [3], а равенство

$$J_0[X, Y]_m = -[X, J_0Y]_m, X, Y \in m$$

выполняется в силу локальной симметричности G/H . Кроме того, G/H является редуктивным однородным пространством. Осталось воспользоваться теоремой 10 работы [1]. Следствие доказано.

Список литературы

1. Степанов Н. А. // Изв. вузов: Математика. 1967. № 12. С. 65.
2. Балащенко В. В., Чурбанов Ю. Д. // Успехи мат. наук. 1990. Т. 45. Вып. 1(271). С. 167.
3. Xenos P. H. // Bull. of the Calcutta Math. Soc. 1986. V. 78. № 5. P. 293.

Поступила в редакцию 25.03.92.

УДК 519.6

Ю. В. ЛЫСЕНКО

О МЕТОДЕ НЬЮТОНА—КАНТОРОВИЧА ОТЫСКАНИЯ МИНИМУМОВ ГЛАДКИХ ФУНКЦИОНАЛОВ

The article deals with some new results that are concerned with Newton-Kantorovich method for finding minimum points for smooth functionals. Under condition when the derivative (gradient) of the functional at some point is given and some information about the spectrum of the corresponding hessian is presented, the following values are estimated: the radius of a minimal ball containing the critical points, the radius of maximal ball on which this critical point is a minimum point and the radius of maximal ball on which this critical point is unique.

Одним из основных методов приближенного отыскания точек минимума гладкого функционала F на заданном множестве m гильбертова или банахова пространства X :

$$\min_{x \in m} F(x) \quad (1)$$

является метод Ньютона – Канторовича, при котором эта точка минимума отыскивается как предел приближений Ньютона – Канторовича

$$x_{n+1} = x_n - F''(x_n)^{-1} F'(x_n) \quad (n = 0, 1, \dots), \quad (2)$$

и который, по существу, является приближенным методом отыскания критических точек функционала F , т. е. решений уравнения

$$F'(x) = 0. \quad (3)$$

Этот метод (см., напр., [1–3]) обычно применяется в условиях, гарантирующих выпуклость функционала F и существование его минимума на всем пространстве. Однако более естественно пытаться использовать богатый арсенал теорем о методе Ньютона – Канторовича (см., напр., [3–7]), как приближенном методе решения операторных уравнений. Естественно, возникает вопрос о том, при каких дополнительных условиях отыскиваемая критическая точка является точкой минимума рассматриваемого функционала. В частности, в работе [8] на основе результатов [5–6] соответствующие утверждения были получены для случая, когда производная $F'(x)$ удовлетворяет классическим условиям Л. В. Канторовича. В настоящей статье, которая может рассматриваться как продолжение [8], аналогичные результаты доказаны для случаев, когда производная $F'(x)$ удовлетворяет условиям Вертгейма или условиям Мысовских.

1. Пусть X – гильбертово пространство. Предположим, что функционал F задан на шаре $B(x_0, R)$ из X и что существует производная $F': B(x_0, R) \rightarrow X$, причем оператор $F'(x)$ определен на шаре $B(x_0, R)$, дифференцируем по Фреше во внутренних точках шара $B(x_0, R)$ и удовлетворяет условиям:

$$\|F''(x_1) - F''(x_2)\| \leq k \|x_1 - x_2\| \quad (x_1, x_2 \in B(x_0, R)) \quad (4)$$

и

$$b_- \|h\|^2 \leq (F''(x_0)h, h) \leq b_+ \|h\|^2 \quad (0 < b_- \leq b_+ < \infty). \quad (5)$$

Ниже нам понадобятся константы

$$a = \|F''(x_0)^{-1} F'(x_0)\|, \quad b = b_-^{-1} \quad (6)$$

и функции

$$\varphi(r) = a + bkr^{1+\theta} / (1+\theta) \quad (7)$$

и

$$\psi(r) = (1+\theta)r^{1+\theta}(1-r)^{-1-\theta}. \quad (8)$$

Функция (7) (см. [7]) при условии

$$a^*bk < \theta^*(1+\theta)^{-\theta} \quad (9)$$

имеет две неподвижные точки ρ_- и ρ_+ , которые сливаются в одну $\rho_- = \rho_+$ при

$$a^*bk = \theta^*(1+\theta)^{-\theta} \quad (10)$$

и ни одной при

$$a^*bk > \theta^*(1+\theta)^{-\theta}. \quad (11)$$

Теорема 1. Пусть $a^*bk \leq \theta^*(1+\theta)^{-\theta}$, $\rho_* = (bk)^{-1/\theta}$, если $(bk)^{-1/\theta} \leq R$ и $\rho_* = R$ в противном случае. Тогда при $R > \rho_-$ задача (1) имеет в шаре $B(x_0, \rho_*)$ решение x_* ; это решение x_* лежит в шаре $B(x_0, \rho_-)$ и при $\rho_- \leq R < \rho_+$ является единственной критической точкой функционала F в шаре $B(x_0, R)$.

Действительно, несложно показать [8], что при любых $x_1, x_2 \in B(x_0, \rho_*)$ выполняется неравенство

$$(F'(x_1) - F'(x_2), x_1 - x_2) \geq [b_- - k\rho_*^0] \|x_1 - x_2\|^2 \geq 0.$$

Полученное неравенство означает, что функционал F является на шаре $B(x_0, \rho_*)$ выпуклым. Объединяя только что доказанный факт и теорему 1 из [7], получаем утверждение теоремы.

2. Будем искать критическую точку функционала F , решая уравнение (2) методом Ньютона–Канторовича (2). Пусть определенная рекуррентными формулами последовательность

$$\rho_{n+1} = \rho_n - \frac{bk(\rho_n - \rho_{n-1})^{1+\theta}}{(1+\theta)(1 - bk\rho_n^0)} \quad (12)$$

$$(n = 0, 1, \dots; \rho_0 = 0, \rho_1 = a)$$

монотонно возрастает и ограничена. Тогда [7] она сходится к некоторому пределу ρ_* , который удовлетворяет неравенству $\rho_* \geq \rho_-$. Отметим, что точные условия сходимости последовательности (12) до сих пор неизвестны [9]. Достаточным условием такой сходимости является неравенство

$$a^{1/\theta} bk \leq h(\theta), \quad (13)$$

где $h(\theta)$ – единственная неподвижная точка функции (8), при этом последовательность (2) сходится сверхбыстро с показателем $1+\theta$. Нас будет интересовать поведение функционала на приближениях (2).

Теорема 2. Пусть $\rho_* = (bk)^{-1/\theta}$, если $(bk)^{-1/\theta} \leq R$, и $\rho_* = R$ в противном случае и последовательность ρ_n сходится к некоторому пределу $\rho_* \leq \rho_*$. Тогда приближения (2) определены для всех $n = 0, 1, \dots$ принадлежат шару $B(x_0, \rho_*)$ и сходятся к решению x_* , причем справедливы неравенства

$$\left[\frac{1}{2}h - \frac{k\rho_n^0}{2} - \frac{k(\rho_{n+1} - \rho_n)^0}{(1+\theta)(2+\theta)} \right] \|x_{n+1} - x_n\|^2 \leq F(x_n) - F(x_{n+1}) \leq \quad (14)$$

$$\leq \left[\frac{1}{2}b_- + \frac{k\rho_n^0}{2} + \frac{k(\rho_{n+1} - \rho_n)^0}{(1+\theta)(2+\theta)} \right] \|x_{n+1} - x_n\|^2,$$

$$\left[\frac{1}{2}h - \frac{k\rho_n^0}{2} - \frac{k(\rho_n - \rho_*)^0}{(1+\theta)(2+\theta)} \right] \|x_* - x_n\|^2 \leq F(x_n) - F(x_*) \leq \quad (15)$$

$$\leq \left[\frac{1}{2}b_- + \frac{k\rho_n^0}{2} + \frac{k(\rho_n - \rho_*)^0}{(1+\theta)(2+\theta)} \right] \|x_* - x_n\|^2.$$

Доказательство. Из (2) очевидным образом следует тождество

$$-F''(x_n)(x_{n+1} - x_n)^2 - F''(x_n)(x_{n+1} - x_n) = 0,$$

откуда

$$F(x_n) - F(x_{n+1}) = \frac{1}{2}F''(x_n)(x_{n+1} - x_n)^2 -$$

$$- \left[F(x_{n+1}) - F(x_n) - F'(x_n)(x_{n+1} - x_n) - \frac{1}{2}F''(x_n)(x_{n+1} - x_n)^2 \right].$$

Оператор $F''(x_n)$ при каждом $n = 0, 1, \dots$ удовлетворяет неравенствам:

$$[b_- - k\rho_n^0] \|h\|^2 \leq (F''(x_n)h, h) \leq [b_+ + k\rho_n^0] \|h\|^2 \quad (n = 0, 1, \dots) \quad (16)$$

и, в частности, является положительно определенным самосопряженным оператором. Далее, последовательно применяя теоремы об интегральной форме остаточного члена в формуле Тейлора (см., напр., [3]) и неравенство (4), получаем:

$$F(x_{n+1}) - F(x_n) - F'(x_n)(x_{n+1} - x_n) - \frac{1}{2}F''(x_n)(x_{n+1} - x_n)^2 \leq$$

$$\leq \int_0^1 (1-\lambda) k \lambda^\theta (\rho_{n+1} - \rho_n)^\theta d\lambda \|x_{n+1} - x_n\|^2 =$$

$$= \frac{k(\rho_{n+1} - \rho_n)^\theta}{(1+\theta)(2+\theta)} \|x_{n+1} - x_n\|^2. \quad (17)$$

Из (16) – (17) немедленно вытекают неравенства (14). Аналогично доказываются неравенства (15); при этом вместо равенства (16) используется равенство

$$F(x_n) - F(x_*) = \frac{1}{2} F''(x_*) (x_* - x_n)^2 +$$

$$+ [F(x_n) - F(x_*) - F'(x_*) (x_n - x_*) - \frac{1}{2} F''(x_*) (x_n - x_*)^2],$$

следующее из равенства $F'(x_*) = 0$.

3. Рассмотрим случай, когда оператор $F''(x)$ имеет на всем шаре $B(x_0, R)$ непрерывный обратный оператор, ограниченный некоторой постоянной b (впервые этот случай был рассмотрен И. И. Мысовских; наиболее общий результат о сходимости приближений (2) к решению уравнения (3) был получен в [5]).

Пусть выполняются (4) – (5) и неравенства:

$$\|F''(x) - F''(y)\| \leq \omega(\|x - y\|), \quad (18)$$

$$\|F''(\zeta)^{-1}\| \leq b, \quad (19)$$

где $\omega(r)$ – неотрицательная, монотонно возрастающая функция, обращающаяся в нуль при $r = 0$.

Определим функции

$$\chi(r) = 1 - b\omega(r), \quad (20)$$

$$\Omega(r) = \int_0^r (r-t)\omega(t)dt \quad (0 \leq r \leq R) \quad (21)$$

и для $0 < v < u < R$

$$H(v, u) = \frac{\Omega(u-v)}{(u-v)^2}. \quad (22)$$

Рассмотрим рекуррентную последовательность чисел

$$\rho_{n+1} = \rho_n - \frac{\Omega'(\rho_n - \rho_{n-1})}{1 - \Omega''(\rho_n)} \quad (23)$$

$$(n = 0, 1, \dots; \rho_0 = 0, \rho_1 = a)$$

и рассмотрим уравнение

$$r - \Omega'(r) = 0. \quad (24)$$

Пусть ρ_- – наименьший положительный корень уравнения (24), если он существует и $+\infty$ в противном случае. В силу выпуклости функции $\Omega(r)$ на интервале $[0, \rho_-]$ корректно определена [7] функция

$$W(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega^{(n)}(r), \quad (25)$$

где $\Omega^{(0)}(r) = r$; $\Omega^{(n+1)}(r) = \Omega' \Omega^{(n)}(r)$ ($n = 0, 1, \dots$).

Теорема 3. Пусть $W(a) \leq R$; пусть ρ_- – нуль на $[0, R]$ функции $\chi(r)$, если он существует, и $\rho_- = R$ в противном случае. Тогда задача (1) имеет в шаре $B(x_0, \rho_-)$ решение x_* ; это решение x_* лежит в шаре $B(x_0, \rho_-)$ и является единственной критической точкой функционала F в шаре $B(x_0, R)$; приближения (2) определены для всех $n = 0, 1, \dots$, принадлежат шару $B(x_0, \rho_-)$ и удовлетворяют неравенствам:

$$\left[\frac{1}{2} b_- - \frac{\omega(\rho_n)}{2} - H(\rho_n, \rho_{n+1}) \right] \|x_{n+1} - x_n\|^2 \leq F(x_n) - F(x_{n+1}) \leq$$

$$\leq \left[\frac{1}{2}b_- + \frac{\omega(\rho_n)}{2} + H(\rho_n, \rho_{n+1}) \right] \|x_{n+1} - x_n\|^2, \quad (26)$$

$$\left[\frac{1}{2}b_- - \frac{\omega(\rho_*)}{2} - H(\rho_*, \rho_n) \right] \|x_n - x_*\|^2 \leq F(x_n) - F(x_*) \leq$$

$$\leq \left[\frac{1}{2}b_- + \frac{\omega(\rho_*)}{2} + H(\rho_*, \rho_n) \right] \|x_n - x_*\|^2. \quad (27)$$

Для доказательства первой части теоремы заметим, что F является выпуклым в шаре $B(x_0, \theta)$, или, иначе, что при любых $x_1, x_2 \in B(x_0, \theta)$ выполняется неравенство

$$(F(x_1) - F(x_2), x_1 - x_2) \geq [b_- \omega(\rho_*)] \|x_1 - x_2\|^2 \geq 0.$$

Далее, используя результат теоремы 4 из [5] и выпуклость F , получаем доказательство первой части теоремы.

Неравенства (26)–(27) доказываются аналогично неравенствам (14)–(15).

Список литературы

1. С е а Ж. Оптимизация. Теория и алгоритмы. М., 1973.
 2. К а н т о р о в и ч Л. В., А к и л о в Г. П. Функциональный анализ. М., 1984.
 3. В а й н б е р г М. М. Вариационный метод и метод монотонных операторов. М., 1972.
 4. К р а с н о с е л ь с к и й М. А., В а й н и к к о Г. М., З а б р е й к о П. П., Р у т и ц к и й Я. Б., С т е ц е н к о В. Я. Приближенное решение операторных уравнений. М., 1969.
 5. З а б р е й к о П. П. // Шилова Г. Е. Дифференцирование функций: Высшие производные и вариационное исчисление. Ярославль, 1980. С. 51.
 6. Z a b r e j k o P. P., N g u e n D. F. // Numer. funct. anal. and optimiz. 9. 1987. № 5–6. Р. 671.
 7. З а б р е й к о П. П., Н г у е н Д ы к Ф и е н // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1989. № 3. С. 8.
 8. З а б р е й к о П. П., Л ы с е н к о Ю. В. // Докл. АН РБ. 1993. Т. 37. № 2. С. 106.
 9. Д е м и д о в и ч Н. Т., З а б р е й к о П. П., Л ы с е н к о Ю. В. // Весці АН РБ. Сер. фіз.-мат. навук. 1993. № 3.
- Поступила в редакцию 19.05.92.

УДК 517.926.4

С. М. АРТЕМЬЕВА

О ПРИВОДИМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ФУНКЦИОНАЛЬНО-КОММУТАТИВНОЙ МАТРИЦЕЙ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Necessary and sufficient conditions of reducibility linear differential systems with functional-commutative matrix of coefficients are obtained.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с функционально-коммутиативной матрицей коэффициентов

$$\dot{x} = P(t)x, \quad t \geq t_0, \quad (1)$$

причем все собственные значения матрицы $P(t)$ будем считать вещественными, а ее элементы ограниченными на $[t_0, +\infty)$.

Теорема. Система (1) приводима тогда и только тогда, когда выполняются условия:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t P(\tau) d\tau = A, \quad (2)$$

$$\| \exp \int_{t_0}^t (P(\tau) - A) d\tau \| \leq m_1 < +\infty, \quad (3)$$