7. Абдурахманов А. А., Забрейко П. П. // Докл. АН БССР. 1988. Т. 22. № 12. С. 1061.
8. Вебстер А., Сеге Г. Дифференциальные уравнения в частных производных математической физики. М.; Л., 1933. Ч. 1.

Поступила в редакцию 11.02.92.

УДК 517.948.35

А. А. КУЛЕШОВ, МУХАММАД ШАМИ ХАССО

КЛАССИЧЕСКАЯ ПРОБЛЕМА МОМЕНТОВ И НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

In terms of moment sequence (ωA^n), constructed on the bounded self-adjoit operator A in separable Hilbert space H and on state ω on L(H), a classical approach to the study of spectral properties of an operator A is developed.

§ 1. Введение. Формулировка результатов.

В данной статье предлагается подход к изучению некоторых спектральных характеристик самосопряженного ограниченного оператора в сепарабельном гильбертовом пространстве, основанный на решении классической проблемы моментов, т. е. в терминах регуляризованных следов от степеней оператора A, которые представляют собой точные нормальные состояния на алгебре Фон Неймана, порожденной оператором A. Так что под регуляризованным следом от оператора понимается число $\mathrm{Tr}(\rho A)$, где ρ – ядерный положительный оператор с конечным следом и нулевым ядром, а $\mathrm{Tr}(.)$ – след оператора, стоящего в круглых скобках.

Строится представление π алгебры Фон Неймана, порожденной оператором A в пространстве $B(l_2(0, +\infty))$, которое «представляет» исходный оператор A в виде бесконечной якобиевой матрицы. Формулы, полученные в статье, основываются на простоте спектра оператора $\pi(A)$ и точности представления π.

Предложение 1. Спектр любого ограниченного самосопряженного оператора A в сепарабельном гильбертовом пространстве совпадает со спектром выражения:

$$(\pi(A)x)_j = b_{j-1}x_{j-1} + b_j x_{j+1} + a_j x_j, \tag{1}$$

$$j = \ldots, -1, 0, 1, \ldots, \quad x_{-1} = 0, \; x = (x_0, x_1, \ldots) \in l_2(0, +\infty).$$

Константы a_j и b_j определены в § 2. По поводу разностного выражения (1) см. также [2].

Некоторые полученные формулы, возможно, и не имеют права претендовать на оригинальность. Например, равенство

$$\|A\| = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|\mathrm{Tr}(\rho A^n)|} \tag{2}$$

введено в [3], однако с привлечением развитой техники теории алгебры Фон Неймана. Здесь же мы хотим обратить внимание на возможность однообразного подхода к выводу такого сорта формул.

Следует заметить, что большинство полученных результатов явно не отмечено в литературе, хотя доказывается очень просто. Например, та же формула (2) доказывается в одну строчку.

Предложение 2. Точечный спектр оператора A состоит из тех $\lambda \in R^1$, для которых

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{2t} \int_{-t}^{t} \mathrm{Tr}(\rho \exp(i\xi A)) \exp(-i\xi t)\, d\xi \neq 0.$$

Кроме того, если m – нижняя грань оператора A, а M – верхняя, то

$$m = -\lim_{t\to+\infty} \frac{\ln \mathrm{Tr}(\rho \exp(-tA))}{t},$$

$$M = \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln \mathrm{Tr}\,(\rho \exp(tA))}{t}.$$

Предложение 3. Пусть $|M| \neq |m|$, тогда

a) точка $|M|$ – изолированная точка спектра оператора A и $\|A\| = |M|$ в том и только в том случае, когда

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\mathrm{Tr}\,(\rho A^k)}{\mathrm{Tr}\,(\rho A^{k+1})} = \frac{1}{\|A\|},$$

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{\left|1 - \|A\| \frac{\mathrm{Tr}\,(\rho A^{k-1})}{\mathrm{Tr}\,(\rho A^k)}\right|} < 1;$$

b) точка $|m|$ – изолированная точка спектра оператора A и $\|A\| = |m|$ в том и только в том случае, когда

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\mathrm{Tr}\,(\rho A^k)}{\mathrm{Tr}\,(\rho A^{k+1})} = -\frac{1}{\|A\|},$$

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{\left|1 + \|A\| \frac{\mathrm{Tr}\,(\rho A^{k-1})}{\mathrm{Tr}\,(\rho A^k)}\right|} < 1.$$

Пусть теперь $A \geq 0$, $\|A\| < 2$. Рассмотрим оператор $B = E - A$ и пусть m_B – нижняя грань оператора B, а M_B – верхняя. По определению $M_B = 1 - m$, $m_B = 1 - M$, так что условия $\|B\| = 1$ и $m = 0$ эквивалентны. Заметим, что точка 0 будет изолированной точкой спектра оператора A в том и только в том случае, когда точка 1 будет изолированной точкой спектра оператора B. Кроме того, 0 будет изолированной точкой спектра оператора A тогда и только тогда, когда его область значений замкнута. Откуда получаем

Следствие. Пусть $A \geq 0$, $\|A\| < 2$. Оператор A имеет замкнутую область значений, но не обратим в том и только в том случае, когда

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\mathrm{Tr}\,(\rho (E-A)^k)}{\mathrm{Tr}\,(\rho (E-A)^{k+1})} = 1,$$

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{\left|1 - \frac{\mathrm{Tr}\,(\rho (E-A)^k)}{\mathrm{Tr}\,(\rho (E-A)^{k+1})}\right|} < 1.$$

К этому следствию еще нужно добавить, что в случае существования предела

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{\mathrm{Tr}\,(\rho E-A)^k}{\mathrm{Tr}\,(\rho (E-A)^{k+1})} \right|$$

оператор A обратим, если этот предел меньше 1 и не обратим, если этот предел равен 1.

§ 2. Доказательство результатов.

Пусть M(A) – множество многочленов от оператора A с комплексными коэффициентами, M′(A) – коммутант, M″(A) – бикоммутант, т. е. алгебра Фон Неймана, порожденная оператором A. Превратим M″(A) в предгильбертово пространство, определяя скалярное произведение на M″(A) равенством

$$\langle B, C \rangle = \mathrm{Tr}\,(\rho B^* C), \quad B, C \in M''(A).$$

Пополнение M″(A) обозначим H′. Представление π из M″(A) в B(H′) определим стандартным образом (см., напр., [1]): $\pi(B)C = BC$, где $B \in M''(A)$, $C \in H'$. Определение корректно, ибо

$$\|\pi(B)C\|_{H'} \leq \|B\| \, \|C\|_{H'},$$

$B \in M''(A)$, $C \in M''(A)$. (см. [1], с. 62, п. 2.3.3). Поскольку алгебра M″(A) содержит единицу, то представление π точное. Заметим также, что спектр оператора $B \in M''(A)$ относительно подалгебры $M''(A)$ совпадает со спектром оператора B как оператора из H в H. Кроме того, из самой конструкции представления π следует, что спектр оператора $\pi(A)$ является простым, а из точности π и предыдущего замечания вытекает совпадение спектров оператора A и оператора $\pi(A)$. Таким образом, для доказательства предложения 1 остается реализовать H' в виде $l_2(0, +\infty)$. Но сначала мы реализуем H' в виде гильбертова пространства $L_2(R^1, d\mu)$ – измеримых, интегрируемых с квадратом функций по некоторой положительной мере $d\mu(\lambda)$. Будем предполагать, что спектр оператора A имеет хотя бы одну предельную точку. Обозначим: $m = \inf (Ax, x)$, $M = \sup (Ax, x), \|x\| = 1$. В силу формулы $\|P(A)\| = \max\limits_{\lambda \in \sigma(A)} |P(\lambda)|$ и сделанного предположения о характере спектра оператора A, условие $P(\lambda) \equiv 0$ эквивалентно $P(\lambda) = 0$ для любого многочлена с действительными коэффициентами. Поэтому, если $P(\lambda) \geq 0$, $P(\lambda) \not\equiv 0$, то $\mathrm{Tr}(\rho P(A)) > 0$. Следовательно (см., напр., [4], с. 10), все определители

$$D_k = \begin{vmatrix} 1, & \mathrm{Tr}(\rho A), & \ldots, & \mathrm{Tr}(\rho A^k) \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \mathrm{Tr}(\rho A^k), & \mathrm{Tr}(\rho A^{k+1}), & \ldots, & \mathrm{Tr}(\rho A^{2k}) \end{vmatrix} > 0, \tag{3}$$

$k = 0, 1, \ldots$. Из определения скалярного произведения в пространстве $H'(\langle B, C\rangle = \mathrm{Tr}(\rho B^* C))$ условия (3) эквивалентны линейной независимости последовательности $E, A, A^2, \ldots$ в гильбертовом пространстве H'. Ортогонализируя эту последовательность, получаем последовательность ортонормированных в H' многочленов $P_k(A)$, $k = 0, 1, \ldots$ Поскольку любой многочлен с комплексными коэффициентами можно записать в виде конечной линейной комбинации с комплексными коэффициентами многочленов

$$\{P_k(\lambda)\}_{k=0}^{\infty}, \text{ то } \{P_k(A)\}_{k=0}^{\infty}$$

– ортонормированный базис в H'. Пусть $\mu(\lambda)$ – решение проблемы моментов $\mathrm{Tr}(\rho A^k) = \int \lambda^k d\mu(\lambda)$, с точностью до постоянного слагаемого оно единственно.

Теперь представление π из $M''(A)$ в $B(l_2(0, +\infty))$ строится стандартным образом (см. напр., [4]) и приводит к формуле:

$$(\pi(A)x)_j = b_{j-1}x_{j-1} + b_j x_{j+1} + a_j x_j, \tag{4}$$

где

$$b_j = \sqrt{\frac{D_{j-1}D_{j+1}}{D_j}},\ a_j = \mathrm{Tr}(\rho P_j^2(A)),\ j = 0, 1, \ldots,$$

а D_j считаются по формулам (3). Из сказанного следует предложение 1.

Возвратимся к формуле (2). Для ее доказательства нужно заметить, что $\mathrm{Tr}(\rho \exp(i\xi A))$ – целая функция экспоненциального типа $\|A\|$, поскольку

$$\mathrm{Tr}(\rho \exp(i\xi A)) = \int_{m-0}^{M} \exp(i\xi\lambda) d\mu(\lambda) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{Tr}(\rho A^k)}{k!} (i\xi)^k$$

– характеристическая функция распределения $\mu(\lambda)$ (см. [5]). Отсюда немедленно вытекает (2).

Пусть π – представление $M''(A)$ в $B(L_2(R^1, d\mu))$. Имеем

$$\mathrm{Tr}(\rho(A - \lambda E)^{-1}) = R_z(\pi(A)) = \int_{m-0}^{M} \frac{d\mu(\lambda)}{\lambda - z}, \tag{5}$$

где $R_z(\pi(A))$ – резольвента оператора $\pi(A)$.

Прежде чем доказывать предложение 3, установим один вспомогательный результат.

Лемма. Следующие условия эквивалентны:

а) точка $\lambda_0 = m(\lambda_0 = M)$ – изолированная точка спектра оператора A;

б) точка $z_0 = m(z_0 = M)$ – полюс первого порядка для резольвенты оператора $\pi(A)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если выполнено условие а), тогда резольвента оператора A – аналитическая функция в выколотой окрестности точки λ_0. Функция

$$R_z(\pi(A)) = \mathrm{Tr}(\rho(A - zE)^{-1}) = \int_{m-0}^{M} \frac{d\mu(\lambda)}{\lambda - z}$$

является аналитической в выколотой окрестности точки λ_0 и $R_z(\pi(A))$ – резольвента оператора $\pi(A)$. Поскольку спектр оператора $\pi(A)$ простой, то λ_0 – полюс первого порядка для резольвенты оператора $\pi(A)$. Если выполнено условие (б), тогда

$$\int_{m-0}^{M} \frac{d\mu(\lambda)}{\lambda - z} = \frac{c}{\lambda_0 - z} + \varphi(z),$$

$c \neq 0$ в некоторой окрестности точки λ_0; причем $\varphi(z)$ – аналитическая функция в этой окрестности. Отсюда вытекает существование числа $\epsilon > 0$ такого, что $\mu(\lambda) = c_1$ для $\lambda_0 < \lambda < \lambda_0 + \epsilon$ и $\mu(\lambda) = c_2$ для $\lambda_0 - \epsilon < \lambda < \lambda_0$, где c_1 и c_2 – некоторые константы. При этом

$$\mu(\lambda_0) - \mu(\lambda_0 - 0) = c_1 - c_2 > 0.$$

Таким образом, λ_0 – изолированная точка спектра оператора A. Лемма доказана.

Очевидно, что эта лемма допускает обобщение на любую точку из $[m, M]$, но нам это обобщение не понадобится.

Для того чтобы придать этой лемме количественный характер (а это как раз и составит результат предложения 3), заметим, что функция

$$\varphi(z) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{Tr}(\rho A^k)}{\|A\|^{k+1}} \cdot z^{k+1} = \mathrm{Tr}\left(\rho\left(A - \frac{\|A\|}{z} - E\right)^{-1}\right)$$

аналитическая в круге $|z| < 1$. Причем точка $z_0 = 1$ или $z_0 = -1$ суть особые точки суммы ряда. Например, если $\|A\| = |M|$, то особая точка $z_0 = 1$; если $\|A\| = |m|$, то особая точка $z_0 = -1$. Так что точка $z_0 = m(z_0 = M)$ – полюс первого порядка для резольвента оператора $\pi(A)$ в том и только в том случае, когда $z_0 = -1(z_0 = 1)$ – полюс первого порядка для функции $\varphi(z)$. Из теоремы Адамара (см. [6], сноска на с. 97) теперь вытекает предложение 3.

Наконец, предложение 2 есть простое следствие теории характеристических функций (см. по этому поводу [5]).

Список литературы

1. Браттели У., Робинсон Д. Операторные алгебры и квантовая статистическая механика. М., 1982.
2. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев, 1965.
3. Dlugosz J. // Colloquium mathematicum. 1981. V. 24. № 2. P. 323.
4. Ахиезер Н. И. Классическая проблема моментов. М., 1961.
5. Рамачандран Б. Теория характеристических функций. М., 1975.
6. Бибербах Л. Аналитическое продолжение. М., 1967.

Поступила в редакцию 13.02.92.