$$w'' = \frac{w'^2}{w} - \frac{w'}{z} + \frac{i}{z}(aw^2 + b) + w^3 - \frac{1}{w}. \tag{24}$$

Теорема 6. Пусть $u = u(z, a, b)$, $z = \alpha t^2 + \beta x^2 + \gamma y^2$ – произвольное решение уравнения (18) при фиксированных значениях параметров a и b, $f(t, x, y) = -z$, (α, β, γ) из (23). Тогда функция $w = \exp(-iu)$ будет решением уравнения (24). Обратно, если $w = w(z, a, b)$ – решение уравнения (24) при фиксированных параметрах a и b, то функция $u(z) = i\ln w(z)$ будет решением уравнения (18) при тех же значениях параметров a и b, $f(t, x, y) = -z$.

Для решения уравнения (18) в силу теоремы 4 и 6 построим преобразование Бэклунда.

Теорема 7. Пусть $u = u(z, a, b)$, $z = \alpha t^2 + \beta x^2 + \gamma y^2$ – решение уравнения (18) при $f(t, x, y) = -z$, (α, β, γ) из (23), такое, что

$$\Phi \equiv -e^{-iu}\{iu'' + (i\epsilon_1 a - 1)z^{-1} + \epsilon_1 e^{-iu} - e^{iu}\}, \ \Phi(\Phi - 2) \neq 0. \tag{25}$$

Тогда функция

$$u_1 = i\ln\frac{2z\Phi(\Phi - 2)}{2z\dfrac{d\Phi}{dz} + (\epsilon_3 A - \epsilon_2 A)\Phi - 2\epsilon_3 A}, \tag{26}$$

где $A \equiv i(b - \epsilon_1 a) + 2$, $B \equiv i(b + \epsilon_1 a) - 2$, будет решением уравнения (18) при значениях параметров

$$a_1 = i\epsilon_1(\epsilon_3 A - \epsilon_2 B - 4)/2, \tag{27}$$

$$b_1 = -i\epsilon_2 B/2 - i\epsilon_3 A/2, \ \epsilon_j^2 = 1, \ j = \overline{1, 3}.$$

Пример. Уравнение (24) при $a = b$ имеет решение $w = i$. Тогда в силу теоремы 6 решением уравнения (18) будет $u(z, a) = i\ln i$, $z = \alpha t^2 + \beta x^2 + \gamma y^2$, где тройка α, β, γ определяется, согласно (23), при тех же значениях параметров. После применения первого шага рекуррентного соотношения (26) и (27) к решению $u = i\ln i$ получим, например, решение уравнения (18):

$$u = i\ln\frac{2z + a - i}{2iz + ia + 3}$$

при значениях параметров $a_1 = 4i - a$, $b_1 = -a$.

Случай 2 исследуется аналогично случаю 1.

Список литературы

1. З а х а р о в В. Е., М а н а к о в С. В., Н о в и к о в С. П. Теория солитонов: Метод обратной задачи/Под ред. С. П. Новикова. М., 1980.
2. Г р о м а к В. И.//Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18. № 11. С. 1984.
3. О н ж е//Докл. АН БССР. 1983. Т. 27. № 10. С. 872.
4. О н ж е//Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9. С. 2082, 2083.
5. А б д у л л а е в А. С. Асимптотика решений нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка: Автореф. дис. ...канд. физ.-мат. наук. Ташкент, 1984.
6. Г р о м а к В. И.//Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11. № 2. С. 373.

Поступила в редакцию 20.01.92.

УДК 517.925.6

В. И. МАТАТОВ, Л. В. САБЫНИЧ

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОДВИЖНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ ГАМИЛЬТОНА С КУБИЧЕСКИМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ.

Necessary and sufficient conditions of the uniqueness movable singular points for the non-autonomy Hamilton's systems with the cubic nonlinearities were found.

Пусть дана система дифференциальных уравнений Гамильтона

$$
\begin{cases}
\dfrac{d\bar{x}}{dz} = \tilde{\alpha}_0 + \tilde{\alpha}_1\bar{x} + \tilde{\alpha}_2\bar{y} + \tilde{\alpha}_3\bar{x}^2 + \tilde{\alpha}_4\bar{x}\bar{y} + \tilde{\alpha}_5\bar{y}^2 + \tilde{\alpha}_6\bar{x}^3 + \tilde{\alpha}_7\bar{x}^2\bar{y} + \\
\qquad + \tilde{\alpha}_8\bar{x}\bar{y}^2 + \tilde{\alpha}_9\bar{y}^3 = \bar{P}_3(z, \bar{x}, \bar{y}), \\
\dfrac{d\bar{y}}{dz} = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1\bar{x} - \tilde{\alpha}_1\bar{y} + \tilde{\beta}_3\bar{x}^2 - 2\tilde{\alpha}_3\bar{x}\bar{y} - \dfrac{1}{2}\tilde{\alpha}_4\bar{y}^2 + \tilde{\beta}_6\bar{x}^3 - \\
\qquad - 3\tilde{\alpha}_6\bar{x}^2\bar{y} - \tilde{\alpha}_7\bar{x}\bar{y}^2 - \dfrac{1}{3}\tilde{\alpha}_8\bar{y}^3 = \bar{Q}_3(z, \bar{x}, \bar{y}),
\end{cases} \tag{1}
$$

где $\tilde{\alpha}_0 = \tilde{\alpha}_0(z), \ldots, \tilde{\alpha}_9 = \tilde{\alpha}_9(z)$, $\tilde{\beta}_0 = \tilde{\beta}_0(z), \ldots, \tilde{\beta}_6 = \tilde{\beta}_6(z)$ – голоморфные функции z в некоторой области $D \in C$, причем $(\bar{P}_3, \bar{Q}_3) = 1$.

В работе решается задача: найти условия, которым должна удовлетворять данная система, чтобы обе компоненты решения $(\bar{x}(z), \bar{y}(z))$ имели в D только однозначные подвижные особенности, т. е. система (1) была P-типа.

Введем в (1) параметр λ следующим образом [1]:

$$x = \frac{\xi}{\lambda}, \quad y = \frac{\eta}{\lambda}, \quad z = z_0 + \lambda^2 t,$$

где $z_0 \in D$. В полученной системе положим $\lambda = 0$, что даст систему вида:

$$
\begin{cases}
\dfrac{d\xi}{dt} = \tilde{\alpha}_6(z_0)\xi^3 + \tilde{\alpha}_7(z_0)\xi^2\eta + \tilde{\alpha}_8(z_0)\xi\eta^2 + \tilde{\alpha}_9(z_0)\eta^3, \\
\dfrac{d\eta}{dt} = \tilde{\beta}_6(z_0)\xi^3 - 3\tilde{\alpha}_6(z_0)\xi^2\eta - \tilde{\alpha}_7(z_0)\xi\eta^2 - \\
\qquad - \dfrac{1}{3}\tilde{\alpha}_8(z_0)\eta^3.
\end{cases} \tag{2}
$$

Таким образом, имеем автономную систему Гамильтона с гамильтонианом

$$H(\xi, \eta) = -\frac{1}{4}\tilde{\beta}_6(z_0)\xi^4 + \tilde{\alpha}_6(z_0)\xi^3\eta + \frac{1}{2}\tilde{\alpha}_7(z_0)\xi^2\eta^2 +$$

$$+ \frac{1}{3}\tilde{\alpha}_8(z_0)\xi\eta^3 + \frac{1}{4}\tilde{\alpha}_9(z_0)\eta^4.$$

В соответствии с известной методикой [2] с помощью первого интеграла $H(\xi, \eta) - C_0 = 0$ из системы (2) исключаем одну из функций, затем – другую. К полученным дифференциальным уравнениям первого порядка применяем теорему Фукса [1, 3]. В результате необходимые и достаточные условия однозначности подвижных особых точек системы (2) таковы:

$$9\tilde{\alpha}_7\tilde{\alpha}_8\tilde{\alpha}_9 \equiv 2\tilde{\alpha}_8^3 + 27\tilde{\alpha}_6\tilde{\alpha}_9^2, \quad \tilde{\beta}_6\tilde{\alpha}_8^2 \equiv -9\tilde{\alpha}_6^2\tilde{\alpha}_9. \tag{3}$$

Для системы (1) выписанные условия являются лишь необходимыми условиями однозначности подвижных особенностей.

С помощью аффинного преобразования $\bar{x}(z) = x(z) + \mu(z)y(z)$, $\bar{y}(z) = y(z)$ приведем систему (1) к виду, когда в ее первом уравнении коэффициент при y^3 равен нулю. В результате получим систему

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx}{dz} = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 xy + \alpha_5 y^2 + \\
\qquad + \alpha_6 x^3 + \alpha_7 x^2 y + \alpha_8 xy^2 \\
\dfrac{dy}{dz} = \beta_0 + \beta_1 x - \alpha_1 y + \beta_3 x^2 - 2\alpha_3 xy - \dfrac{1}{2}\alpha_4 y^2 + \\
\qquad + \beta_6 x^3 - 3\alpha_6 x^2 y - \alpha_7 xy^2 - \dfrac{1}{3}\alpha_8 y^3,
\end{cases} \tag{4}
$$

где $\alpha_0(z), \ldots, \beta_6(z)$ определенным образом выражаются через $\tilde{\alpha}_0(z), \ldots, \tilde{\beta}_6(z)$ и $\mu(z)$.

Функция $\mu(z)$ выбрана так, что она является решением уравнения

$$-\tilde{\beta}_6\mu^4 + 4\tilde{\alpha}_6\mu^3 + 2\tilde{\alpha}_7\mu^2 + \frac{4}{3}\tilde{\alpha}_8\mu + \tilde{\alpha}_9 = 0.$$

С учетом условий (3) это уравнение запишется следующим образом:

$$\left(9\tilde{\alpha}_6\tilde{\alpha}_9\mu^2 + 2\tilde{\alpha}_8^2\mu + 3\tilde{\alpha}_9\tilde{\alpha}_8\right)^2 = 0. \tag{5}$$

Тогда для системы (4) в соответствии с (3), (5) и тем, что $\beta_6 = \tilde{\beta}_6$, $\alpha_6 = -\beta_6\mu + \tilde{\alpha}_6$, выполняется тождество

$$\beta_6(z)\alpha_7(z) \equiv -2\alpha_6^2(z). \tag{6}$$

Введем в (4) параметр λ [1]:

$$x = \xi,\ y = \frac{\eta}{\lambda},\ z = z_0 + \lambda^2 t, \text{ где } z_0 \in D.$$

Положив в новой системе $\lambda = 0$, будем иметь упрощенную систему

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi}{dt} = \alpha_5(z_0)\eta^2 + \alpha_8(z_0)\xi\eta^2, \\ \dfrac{d\eta}{dt} = -\dfrac{1}{3}\alpha_8(z_0)\eta^3. \end{cases} \tag{7}$$

Интегрируя второе уравнение (7), получаем:

$$\eta(t) = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}\alpha_8(z_0)t + C}},$$

т. е. при $\alpha_8(z_0) \neq 0$ очевидно наличие у системы (7), а значит, и у (4) подвижных критических особых точек.

Итак, если (4) – система P-типа, то необходимо $\alpha_8(z) \equiv 0$.

Пусть теперь

$$x = \frac{\xi}{\lambda},\quad y = \frac{\eta}{\lambda^2},\quad z = z_0 + \lambda^3 t,\quad z_0 \in D.$$

Новая система при $\lambda = 0$ примет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi}{dt} = \alpha_5(z_0)\eta^2 + \alpha_7(z_0)\xi^2\eta, \\ \dfrac{d\eta}{dt} = -\alpha_7(z_0)\xi\eta^2. \end{cases}$$

Используя первый интеграл $H(\xi, \eta) - C_0 = 0$ и второе уравнение этой системы, исключаем функцию $\xi(t)$, что дает уравнение относительно функции $\eta(t)$:

$$\eta'^2 + \frac{2}{3}\alpha_5(z_0)\alpha_7(z_0)\eta^5 - 2C_0\alpha_7(z_0)\eta^2 = 0.$$

В соответствии с теоремой Фукса [1, 3], для того чтобы решения этого уравнения имели только однозначные подвижные особенности, необходимо и достаточно, чтобы $\alpha_5(z_0)\alpha_7(z_0) = 0$.

Итак, чтобы система (4) (при $\alpha_8(z) \equiv 0$) являлась системой P-типа, необходимо: либо 1) $\alpha_5(z) \equiv 0$, либо 2) $\alpha_7(z) \equiv 0$.

В случае 1) исследованию на предмет отсутствия многозначных особых точек подвергается система

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dz} = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 xy + \\ \qquad + \alpha_6 x^3 + \alpha_7 x^2 y, \\ \dfrac{dy}{dz} = \beta_0 + \beta_1 x - \alpha_1 y + \beta_3 x^2 - 2\alpha_3 xy - \dfrac{1}{2}\alpha_4 y^2 - \\ \qquad - \dfrac{2\alpha_6^2}{\alpha_7}x^3 - 3\alpha_6 x^2 y - \alpha_7 xy^2, \end{cases} \tag{8}$$

$\alpha_7(z) \neq 0$.

Из первого уравнения (8) функция $y(z)$ выражается рационально через $x(z)$ и $x'(z)$:

$$y(z) = \frac{x' - \alpha_6 x^3 - \alpha_3 x^2 - \alpha_1 x - \alpha_0}{\alpha_7 x^2 + \alpha_4 x + \alpha_2}.$$

Дифференцируя его и подставляя выражения для $y'(z)$ и $y(z)$, получаем уравнение второго порядка относительно функции $x(z)$ вида

$$x'' = A_0(x, z)x'^2 + A_1(x, z)x' + A_2(x, z), \tag{9}$$

где $A_0(x, z)$, $A_1(x, z)$, $A_2(x, z)$ – рациональные функции x с голоморфными по z коэффициентами.

Исходя из теории Пенлеве – Гамбье [3] получаем, что целая часть $A_2(x, z)$ относительно x должна быть полиномом не выше третьей степени. Это дает дополнительное необходимое условие на коэффициенты системы (8):

$$2\beta_3\alpha_7^2 \equiv 3\alpha_4\alpha_6^2 - 6\alpha_3\alpha_6\alpha_7. \tag{10}$$

Для принадлежности системы(1) P-типу соответствующие необходимые условия есть:

$$\begin{gathered} 2\bar{\beta}_3\bar{\alpha}_8\left(4\bar{\alpha}_8^3 - 27\bar{\alpha}_6\bar{\alpha}_9^2\right) \equiv 27\bar{\alpha}_6\bar{\alpha}_9\left(9\bar{\alpha}_4\bar{\alpha}_6\bar{\alpha}_9 - 4\bar{\alpha}_3\bar{\alpha}_8^2\right), \\ \bar{\alpha}_5\left(4\bar{\alpha}_8^3 - 27\bar{\alpha}_6\bar{\alpha}_9^2\right) \equiv 9\bar{\alpha}_3\bar{\alpha}_8\left(\bar{\alpha}_4\bar{\alpha}_8 - 3\bar{\alpha}_3\bar{\alpha}_9\right). \end{gathered} \tag{11}$$

Уравнение (9) при условии (10) примет вид:

$$x'' = \frac{2\alpha_7 x + \alpha_4}{2\left(\alpha_7 x^2 + \alpha_4 x + \alpha_2\right)}x'^2 + \frac{\alpha_7' x^2 + \alpha_4' x + \alpha_2'}{\alpha_7 x^2 + \alpha_4 x + \alpha_2}x' +$$

$$+ \frac{M_0x^5 + M_1x^4 + M_2x^3 + M_3x^2 + M_4x + M_5}{2\alpha_7^2\left(\alpha_7x^2 + \alpha_4x + \alpha_2\right)}, \tag{12}$$

где M_0, ..., M_5 – определенным образом выражаются через фукнции α_0, α_1, α_3, α_4, α_6, α_7, β_0, β_1 и их производные, причем $\alpha^2_4(z) - 4\alpha_7(z)\alpha_2(z) \not\equiv 0$, так как полюсы функций $A_0(x, z)$, $A_1(x, z)$, $A_2(x, z)$ должны быть простыми [3]. Последнее уравнение исследовано, напр., в [3].

В случае 2) коэффициент $\alpha_7(z) \equiv 0$ и тогда, учитывая тождество (6), $\alpha_6(z) \equiv 0$. Значит, система (4) примет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dz} = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 xy + \alpha_5 y^2, \\ \dfrac{dy}{dz} = \beta_0 + \beta_1 x - \alpha_1 y + \beta_3 x^2 - \\ - 2\alpha_3 xy - \dfrac{1}{2}\alpha_4 y^2 + \beta_6 x^3. \end{cases} \tag{13}$$

Вводим параметр λ по формулам:

$$x = \frac{\xi}{\lambda^3}, \quad y = \frac{\eta}{\lambda^4}, \quad z = z_0 + \lambda^5 t, \quad z_0 \in D.$$

При $\lambda = 0$ получаем систему

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi}{dt} = \alpha_5(z_0)\eta^2, \\ \dfrac{d\eta}{dt} = \beta_6(z_0)\xi^3, \end{cases}$$

которая сводится (используя первый интеграл) к одному уравнению первого порядка:

$$\xi'^3 = \frac{9}{16}\beta_6^2(z_0)\alpha_5(z_0)\xi^8 + \frac{9}{2}\beta_6(z_0)\alpha_5(z_0)C_0\xi^4 + 9\alpha_5(z_0)C_0^2,$$

где C_0 – произвольная постоянная. По теореме Фукса [1, 3] для отсутствия критических подвижных особых точек в решениях этого уравнения необходимо и достаточно, чтобы $\beta^2_6(z_0)\alpha_5(z_0) = 0$. Для системы(13) последнее условие дает следующее: 2a) $\beta_6(z) \equiv 0$, 2б) $\alpha_5(z) \equiv 0$.

В случае 2a) имеем систему второго порядка, которая на предмет однозначности подвижных особенностей исследована в [4].

Если же $\alpha_5(z) \equiv 0$ (т. е. имеет место случай 2б)), то система (13) сводится к уравнению вида (9). Для принадлежности его к P-типу необходимо, чтобы $\alpha^2_4(z)\beta_6(z) \equiv 0$. Система (13) при $\beta_6(z) \equiv 0$ изучена в [4], что позволяет рассматривать (13) при $\alpha_5(z) \equiv \alpha_4(z) \equiv 0$. Тогда в уравнении (9)

$$A_0(x, z) \equiv 0, \; A_1(x, z) \equiv \frac{\alpha_2'(z)}{\alpha_2(z)}, \; A_2(x, z) \equiv T_0x^3 + T_1x^2 + T_2x + T_3,$$

где T_0, T_1, T_2, T_3 выражаются рациональным образом через функции α_0, α_1, α_2, α_3, β_0, β_1, β_6, а также производные некоторых из них, $\alpha_2(z) \not\equiv 0$. При определенных условиях на коэффициенты из этого уравнения получаются первое или второе уравнения Пенлеве [3].

Если же $\alpha_2(z) \equiv 0$, то имеем вырожденный случай. Решения соответствующей системы наряду с подвижными полярными особенностями могут иметь и логарифмические подвижные особенности [5].

Таким образом, тождества (3), (11), а также выводы из [1] и [3] дают необходимые и достаточные условия однозначности подвижных особенностей исходной системы.

Теорема. Если система (1) имеет только однозначные подвижные особые точки, то ее решения выражаются:

а) либо через эллиптические функции,

б) либо через решения линейных уравнений,

в) либо через классические трансцендентные функции,

г) либо через решения первого, второго, третьего или четвертого уравнений Пенлеве.

Список литературы

1. Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.; Л., 1950.
2. Мататов В. И., Филиппович С. Н.//Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24. № 11. С. 2016.
3. Айнс Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков, 1939.
4. Лукашевич Н. А., Мататов В. И.//Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9. № 3. С. 449.
5. Сабынич Л. В.//Респ. науч. чтения по обыкн. дифференц. уравнениям. Тез. докл. Мн., 1990.

Поступила в редакцию 06.02.92.

УДК 517.956.3

Л. Г. ТРЕТЬЯКОВА

К ЗАДАЧЕ О ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ

The theorem of existence and uniqueness of double—periodic solutions for quasilinear telegraph equation in the space of continuous functions has been obtained.

Будем рассматривать задачу о существовании и единственности двоякопериодических обобщенных решений квазилинейного телеграфного уравнения

$$u_{tt} - u_{xx} + cu = f(t, x, u) \tag{1}$$

при $c \neq 0$.

Один из основных методов построения таких решений основан на обращении линейного дифференциального оператора

$$L_c u = u_{tt} - u_{xx} + cu$$

в том или ином пространстве функций, определенных на множестве $\Omega = \{(t, x)/0 \leq t \leq \omega, \; 0 \leq x \leq \omega_1\}$ и последующем переходе к нелинейному операторному уравнению

$$u = G_c F u \tag{2}$$