$$\bar{x}_j = x_{0j},\ j \in J^0(x^0);\ \bar{x}_j = \bar{x}_j,\ j \in J^+(x^0) \cup J^-(x^0),$$
$$\tilde{y}_j = \bar{x}_j - x_{0j},\ j \in J^0(x^0).$$

Докажем, что $(\bar{x}, \tilde{y})$ будет планом для задачи (15). Действительно, для $(\bar{x}, \tilde{y})$ выполняются все прямые ограничения.

Остается доказать, что для него выполняются и основные ограничения. Так как $\bar{x} \in X(\bar{J}^{0+})$, то имеем

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(\bar{x}_j) = \sum_{j \in J^+ \cup J^{0+}} (a_j^+ \bar{x}_j + a_{0j}^+) + \sum_{j \in J^- \cup J^{0-}} (a_j^- \bar{x}_j + a_{0j}^-) = b. \tag{16}$$

Рассмотрим вектор

$$s = \sum_{j \in \bar{J}^{0+}} (a_j^+ \bar{x}_j + a_{0j}^+) + \sum_{j \in J^{0-}} (a_j^- \bar{x}_j + a_{0j}^-),$$

$$= \sum_{j \in J^{0+}} (a_j^+ (x_{0j} + \tilde{y}_j) + a_{0j}^+) + \sum_{j \in \bar{J}^{0-}} (a_j^- (x_{0j} + \tilde{y}_j) + a_{0j}^-),$$

$$= \sum_{j \in \bar{J}^{0+}} a_j^+ \tilde{y}_j + \sum_{j \in \bar{J}^{0-}} a_j^- \tilde{y}_j + \sum_{j \in J^{0+}} (a_j^+ x_{0j} + a_{0j}^+) + \sum_{j \in \bar{J}^{0-}} (a_j^- x_{0j} + a_{0j}^-).$$

Но поскольку $a^+{}_j x_{0j} + a^+{}_{0j} = a^-{}_j x_{0j} + a^-{}_{0j}$ для любого $j \in J$, то из последнего равенства получим:

$$s = \sum_{j \in \bar{J}^{0+}} a_j^+ \tilde{y}_j + \sum_{j \in J^{0-}} a_j^- \tilde{y}_j + \sum_{j \in J^{0+}} (a_j^+ x_{0j} + a_{0j}^+) + \sum_{j \in J^{0-}} (a_j^- x_{0j} + a_{0j}^-).$$

Поставив полученное равенство в (16), получим:

$$\sum_{j \in J^+ \cup J^{0+}} (a_j^+ \bar{x}_j + a_{0j}^+) + \sum_{j \in J^- \cup J^{0-}} (a_j^- \bar{x}_j + a_{0j}^-) + \sum_{j \in J^{0+}} a_j^+ \tilde{y}_j + \sum_{j \in J^{0-}} a_j^- \tilde{y}_j = b.$$

Итак, показали, что $(\bar{x}, \tilde{y})$ является планом для задачи (15). Вычислим значения $f(\bar{x}, \tilde{y})$

$$f(\bar{x}, \tilde{y}) = c'\bar{x} + c'(J^0)\tilde{y} = c'\bar{x} \le f(x^0, 0) = c'x^0,$$

т. е. $c'\bar{x} \le c'x^0$ для любого $\bar{x} \in X(\bar{J}^{0+})$, что означает, что x^0 – оптимальный план для $X(\bar{J}^{0+})$.

Список литературы

1. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Методы линейного программирования. Ч. 1. Общие задачи. Мн., 1977.

Поступила в редакцию 23.12.91.

УДК 517.925.7

В. И. ГРОМАК, Ж. А. ЛУЦЕВИЧ

НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ, СВЯЗАННОЕ С УРАВНЕНИЕМ SINE-GORDON, И ТРЕТЬЕ УРАВНЕНИЕ ПЕНЛЕВЕ

By virtue of the reduction of the special one- and two-dimension partial differential equations to the third Painleve equation, their Backlund transformations and exact solutions are constructed.

А. В этой работе изучим некоторые свойства решений уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = ae^u + be^{-u} + xt(ce^{2u} + de^{-2u}), \tag{1}$$

где a, b, c, d – параметры в связи с установленной связью между решениями уравнения (1) и третьим уравнением Пенлеве.

Если в уравнении (1) $a=b=c=d=0$, то уравнение (1) вырождается в волновое уравнение $u_{xt}=0$ с общим решением $u(x, t)=f(x)+g(t)$ с произвольными функциями $f(x)$ и $g(t)$.

Если же в уравнении (1): 1. $b=c=d=0$, $a\neq 0$ или $a=c=d=0$, $b\neq 0$, то уравнение (1) является уравнением Лиувилля $u_{xt}=\exp(\eta u)$ с общим решением

$$u(x, t)=f(x)-g(t)-$$
$$-\frac{2}{\eta}\ln\left\{\rho\int_{x_0}^{x}\exp(\eta f(y))dy+\frac{\eta}{2\rho}\int_{t_0}^{t}\exp(-\eta g(s))ds\right\}, \tag{2}$$

где $f(x)$, $g(t)$ – произвольные функции, ρ – произвольный параметр. Пусть в уравнении (1): 2. $c=d=0$, $ab\neq 0$. Тогда линейной заменой оно приводится к уравнению Sine-Gordon (SG) $u_{xt}=\sin u$. Если в уравнении (1): 3. $a=b=0$, $cd\neq 0$, то заменой

$$u_1=2u,\quad x_1=\frac{x^2}{\sqrt{2}},\quad t_1=\frac{t^2}{\sqrt{2}}$$

оно приводится к случаю 2 уравнения (1) и, следовательно, к (SG).

Уравнение (SG) появляется во многих приложениях от дифференциальной геометрии до нелинейной оптики, где солитонами уравнения (SG) объясняется явление самоиндуцированной прозрачности. Также оно интенсивно исследовалось как модель релятивистской теории поля (как классической, так и квантовой) [1].

Таким образом, для уравнения (1) остается рассмотреть следующие случаи: 4. $cd\neq 0$, ($ab\neq 0$ или $a=0$, $b\neq 0$ или $a\neq 0$, $b=0$); 5. $c=0$, $d\neq 0$; 6. $c\neq 0$, $d=0$. При этом случай 6 линейной заменой u сводится к случаю 5. Ниже будем рассматривать случаи 4 и 5 уравнения (1) и покажем, что здесь уравнение (1), как и уравнение (SG) [2, 3], имеет класс решений, определяемый решениями третьего уравнения Пенлеве.

Теорема 1. Пусть $z=xt$, $u=u(z)$ – решение уравнения (1). Тогда функция $w=\exp(u)$ будет решением третьего уравнения Пенлеве

$$w''=\frac{w'^2}{w}-\frac{w'}{z}+\frac{a}{z}w^2+\frac{b}{z}+cw^3+\frac{d}{w}.$$

И наоборот, если $w=w(z)$ – произвольное решение уравнения (P3), то функция $u=\ln w(z)$, $z=xt$, будет решением уравнения (1).

Заметим, что если в уравнении (P_3) $c=0$, $d\neq 0$ и $a=0$, то оно интегрируется в элементарных функциях, и, следовательно, соответствующие решения уравнения (1) также будут элементарными функциями.

Пусть в уравнении (1) $c=0$, $ad\neq 0$. Без ограничения общности в этом случае можно считать $a=-d=1$, т. е. уравнение (1) примет вид:

$$u_{xt}=e^{u}+be^{-u}-xte^{-2u}, \tag{3}$$

а уравнение (P_3):

$$w''=\frac{w'^2}{w}-\frac{w'}{z}+\frac{w^2}{z}+\frac{b}{z}-\frac{1}{w}. \tag{4}$$

Уравнение (4) исследовано в работе [4], где построено преобразование Бэклунда уравнения (4), а также алгебраические решения уравнения (4), которые с точностью до инверсии функции w исчерпывают все алгебраические решения уравнения (P_3).

Теорема 2. Пусть $w=w(z, b)$ – решение уравнения (4) при фиксированном значении параметра b. Тогда функция

$$w(z, b_1)=\frac{(\epsilon-b)w+z-\epsilon zw'}{w^2},\quad \epsilon^2=1, \tag{5}$$

будет решением уравнения (4) при $b_1=b-2\epsilon$.

Таким образом, в силу теорем 1 и 2, для уравнения (3) справедлива

Теорема 3. Пусть $u=u(z, b)$, $z=xt$, – решение уравнения (3) при фиксированном значении параметра b. Тогда функция

$$u_1(z,\ b_1) = \ln[(\epsilon - b)e^u + z - \epsilon z u' e^u] - 2u,\ z = xt,\ \epsilon^2 = 1, \tag{6}$$

будет решением уравнения (4) при значении параметра $b_1 = b - 2\epsilon$.

Пример. Решение $w = z^{1/3}$ при $b = 0$ уравнения (4) порождает решение $u = \ln(xt)^{1/3}$ при $b = 0$ уравнения (3). Исходя из этого решения в силу (6) имеем, например, решение уравнения (3):

$$u_1 = \ln\left(3(xt)^{2/3} \mp 2\right) - \ln(xt)^{1/3} - \ln 3,\ b = \pm 2. \tag{7}$$

Заметим, что в [4] показано, что уравнение (4) при $b = 2n,\ n \in Z$ имеет алгебраические решения, являющиеся рациональными по $z^{1/3}$ функциями, которые в силу теоремы 1 порождают решения уравнения (3) вида:

$$u = \ln\frac{P\left((xt)^{1/3}\right)}{Q\left((xt)^{1/3}\right)}, \tag{8}$$

где P и Q – полиномы своих аргументов при $b = 2n,\ n \in Z$.

Пусть в уравнении (1) $cd \neq 0$ (случай 4). В этом случае уравнение (1) линейной заменой u, x, t может быть приведено к уравнению

$$u_{xt} = ae^u + be^{-u} + xt\left(e^{2u} - e^{-2u}\right). \tag{9}$$

Уравнение (9) в частном случае $a = -b = \nu$ линейной заменой приводится к виду:

$$u_{xt} = \nu \sin u + xt \sin 2u. \tag{10}$$

Связь между решениями уравнений (10) и (P_3) установлена в [2]. Также там построено бэклунд-преобразование для автомодельных решений ($z = xt$) уравнения (10). Асимптотические свойства этих решений изучались в [5].

Рассмотрим общий случай уравнения (9). При этом, согласно теореме 1, уравнение (P_3) имеет вид:

$$w'' = \frac{w'^2}{w} - \frac{w'}{z} + \frac{a}{z}w^2 + \frac{b}{z} + w^3 - \frac{1}{w}, \tag{11}$$

для которого справедлива [6]

Теорема 4. Пусть $w(z,\ a,\ b)$ – решение уравнения (11) такое, что

$$R(z) \equiv w' - \epsilon_1 w^2 - (\epsilon_1 a - 1)wz^{-1} + 1,\ R(R-2) \neq 0. \tag{12}$$

Тогда функция

$$w_1(z) = \frac{2zR(R-2)}{2z\frac{dR}{dz} + (\epsilon_3 A - \epsilon_2 B)R - 2\epsilon_3 A}, \tag{13}$$

где $A = \epsilon_1 a + b - 2,\ B = b - \epsilon_1 a + 2$, будет решением уравнения (11) при

$$a_1 = \frac{\epsilon_1}{2}(\epsilon_2 B - \epsilon_3 A + 4),\ b_1 = \frac{\epsilon_2}{2}B + \frac{\epsilon_3}{2}A,\ \epsilon_j^2 = 1,\ j = \overline{1,\ 3}. \tag{14}$$

Таким образом, в силу теорем 1 и 4 справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. Пусть $u = u(z,\ a,\ b),\ z = xt,$ – решение уравнения (9) при фиксированных значениях параметров a и b такое, что

$$\Phi(z) \equiv e^u\{u' - \epsilon_1 e^u - (\epsilon_1 a - 1)z^{-1} + e^{-u}\},\ \Phi(\Phi - 2) \neq 0. \tag{15}$$

Тогда функция

$$u_1 = \ln\frac{2z\Phi(\Phi-2)}{2z\frac{d\Phi}{dz} + (\epsilon_3 A - \epsilon_2 B)\Phi - 2\epsilon_3 A} \tag{16}$$

будет решением уравнения (9) при значениях параметров (14).

Пример. Уравнение (9) имеет тривиальное решение $u = 0$ при $a = -b$. Согласно (15), (16), имеем, например, решение

$$u_1 = \ln\frac{2xt + a - 1}{2xt + a + 1}$$

уравнения (9) при $a_1 = a + 2,\ b_1 = 2 - a$.

В. В этой части рассмотрим двухмерное дифференциальное уравнение в частных производных

$$u_{tt}-u_{xx}-u_{yy}+\tilde{a}e^{u}+\tilde{b}e^{-u}+\tilde{f}(t,\ x,\ y)\left(\tilde{c}e^{2u}+\tilde{d}e^{-2u}\right)=0, \tag{17}$$

где $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$, $\tilde{d}$ – постоянные параметры. $\tilde{f}(t, x, y)\neq 0$ – некоторая специальная функция.

Если $\tilde{a}=\tilde{b}=\tilde{c}=\tilde{d}=0$, то уравнение (17) суть волновое уравнение. Если в уравнении (17) либо $\tilde{a}\tilde{b}\neq 0$, $\tilde{c}=\tilde{d}=0$, либо $\tilde{c}\tilde{d}\neq 0$, $\tilde{a}=\tilde{b}=0$, то линейной заменой u, t, x, y оно приводится к двухмерному уравнению Sine-Gordon $u_{tt}-u_{xx}-u_{yy}=\sin u$, которое интегрируется методом обратной задачи рассеяния (МОЗР).

Таким образом, для уравнения (17) остается изучить случаи 1. $\tilde{c}\tilde{d}\neq 0$ ($\tilde{a}\tilde{b}\neq 0$ или $\tilde{a}=0$, $\tilde{b}\neq 0$ или $\tilde{a}\neq 0$, $\tilde{b}=0$); 2. $\tilde{c}=0$, $\tilde{d}\neq 0$; 3. $\tilde{c}\neq 0$, $\tilde{d}=0$. Очевидно, случай 3 линейной заменой u сводится к случаю 2. Далее будем рассматривать уравнение (17) в случаях 1 и 2 и покажем, что в этих случаях уравнение (17) имеет класс решений, порождаемых решениями уравнения (P_3).

1. Пусть $\tilde{c}\tilde{d}\neq 0$. Тогда, не ограничивая общности рассмотрения, в уравнении (17) фиксируем параметры $\tilde{c}$ и $\tilde{d}$, сделав замену

$$u\to -iu+\frac{1}{4}\ln\frac{\tilde{d}}{\tilde{c}}$$

и вместо уравнения (17) будем рассматривать уравнение с двумя параметрами

$$u_{tt}-u_{xx}-u_{yy}+ae^{-iu}+be^{iu}+f(t,\ x,\ y)\sin 2u=0, \tag{18}$$

где a, b – параметры, f(t, x, y) – некоторая функция

$$\left(a=i\tilde{a}\,(\tilde{d}/\tilde{c})^{1/4},\quad b=i\tilde{b}\,(\tilde{c}/\tilde{d})^{1/4},\quad f=2\tilde{f}\,(\tilde{c}\tilde{d})^{1/2}\right).$$

В работе [3] уравнение (18) изучалось в случае $a+b=0$, т. е.

$$u_{tt}-u_{xx}-u_{yy}+\nu\sin u+f(t,\ x,\ y)\sin 2u=0. \tag{19}$$

В этой работе была установлена связь уравнения (19) с третьим уравнением Пенлеве в виде:

$$w''=\frac{w'^2}{w}-\frac{w'}{z}-\frac{\nu}{8z}\left(w^2-1\right)-\frac{\mu}{8}\left(w^3-\frac{1}{w}\right),$$

а также построены преобразования Бэклунда и точные решения уравнения (19).

Как и в [3], укажем вид функции f(t, x, y), при котором уравнение (18) имеет автомодельные решения, порождаемые решениями третьего уравнения Пенлеве.

Пусть

$$z=\varphi(t,\ x,\ y),\ f(t,\ x,\ y)=F(z) \tag{20}$$

такая замена, что уравнение (18) примет вид:

$$zu''+u'+ae^{-iu}+be^{iu}+2F(z)\sin 2u=0. \tag{21}$$

Будем искать $\varphi=\varphi(t, x, y)$ в виде полинома

$$\varphi=\alpha t^2+\beta x^2+\gamma y^2. \tag{22}$$

Тогда тройка (α, β, γ) принимает значение

$$\text{либо } (1/4,\ -1/4,\ 0),\ \text{либо } (1/4,\ 0,\ -1/4),$$

$$\text{либо } (0,\ -1/4,\ -1/4). \tag{23}$$

Далее в уравнении (21) положим $u(z)=i\ln w$, $F(z)=-z$. Тогда для определения функции w(z) будем иметь третье уравнение Пенлеве в виде:

$$w'' = \frac{w'^2}{w} - \frac{w'}{z} + \frac{i}{z}\left(aw^2 + b\right) + w^3 - \frac{1}{w}. \tag{24}$$

Теорема 6. Пусть $u = u(z, a, b)$, $z = \alpha t^2 + \beta x^2 + \gamma y^2$ – произвольное решение уравнения (18) при фиксированных значениях параметров a и b, $f(t, x, y) = -z$, (α, β, γ) из (23). Тогда функция $w = \exp(-iu)$ будет решением уравнения (24). Обратно, если $w = w(z, a, b)$ – решение уравнения (24) при фиксированных параметрах a и b, то функция $u(z) = i\ln w(z)$ будет решением уравнения (18) при тех же значениях параметров a и b, $f(t, x, y) = -z$.

Для решения уравнения (18) в силу теоремы 4 и 6 построим преобразование Бэклунда.

Теорема 7. Пусть $u = u(z, a, b)$, $z = \alpha t^2 + \beta x^2 + \gamma y^2$ – решение уравнения (18) при $f(t, x, y) = -z$, (α, β, γ) из (23), такое, что

$$\Phi \equiv -e^{-iu}\left\{iu'' + (i\epsilon_1 a - 1)z^{-1} + \epsilon_1 e^{-iu} - e^{iu}\right\},\ \Phi(\Phi - 2) \neq 0. \tag{25}$$

Тогда функция

$$u_1 = i\ln\frac{2z\Phi(\Phi - 2)}{2z\dfrac{d\Phi}{dz} + (\epsilon_3 A - \epsilon_2 A)\Phi - 2\epsilon_3 A}, \tag{26}$$

где $A \equiv i(b - \epsilon_1 a) + 2$, $B \equiv i(b + \epsilon_1 a) - 2$, будет решением уравнения (18) при значениях параметров

$$a_1 = i\epsilon_1(\epsilon_3 A - \epsilon_2 B - 4)/2, \tag{27}$$

$$b_1 = -i\epsilon_2 B/2 - i\epsilon_3 A/2,\ \epsilon_j^2 = 1,\ j = \overline{1,\ 3}.$$

Пример. Уравнение (24) при $a = b$ имеет решение $w = i$. Тогда в силу теоремы 6 решением уравнения (18) будет $u(z, a) = i\ln i$, $z = \alpha t^2 + \beta x^2 + \gamma y^2$, где тройка α, β, γ определяется, согласно (23), при тех же значениях параметров. После применения первого шага рекуррентного соотношения (26) и (27) к решению $u = i\ln i$ получим, например, решение уравнения (18):

$$u = i\ln\frac{2z + a - i}{2iz + ia + 3}$$

при значениях параметров $a_1 = 4i - a$, $b_1 = -a$.

Случай 2 исследуется аналогично случаю 1.

Список литературы

1. Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П. Теория солитонов: Метод обратной задачи/Под ред. С. П. Новикова. М., 1980.
2. Громак В. И.//Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18. № 11. С. 1984.
3. Он же//Докл. АН БССР. 1983. Т. 27. № 10. С. 872.
4. Он же//Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9. С. 2082, 2083.
5. Абдуллаев А. С. Асимптотика решений нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка: Автореф. дис. ...канд. физ.-мат. наук. Ташкент, 1984.
6. Громак В. И.//Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11. № 2. С. 373.

Поступила в редакцию 20.01.92.

УДК 517.925.6

В. И. МАТАТОВ, Л. В. САБЫНИЧ

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОДВИЖНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ ГАМИЛЬТОНА С КУБИЧЕСКИМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ.

Necessary and sufficient conditions of the uniqueness movable singular points for the non-autonomy Hamilton's systems with the cubic nonlinearities were found.

Пусть дана система дифференциальных уравнений Гамильтона