Список литературы

1. Габасов Р., Кириллова Ф. М. и др. Конструктивные методы оптимизации. Мн., 1984—1987. Ч. 1—4.
2. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Оптимизация линейных систем. Мн., 1973.
3. Абдурахимов А. О. Гарантированная минимизация совокупности квадратичных функций // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1991. № 2. С. 67.
4. Абдурахимов А. О. Линейно-квадратичная задача оптимального управления с неопределенностью в критерии качества // Редкол. журн. «Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех.» Мн., 1991. 37 с. Деп. в ВИНИТИ 28.03.91. № 1369-В91.

Поступила в редакцию 15.11.91.

УДК 517.977

НГУЕН ДЫК ХИЕУ (ВЬЕТНАМ)

АДАПТИВНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ СЕПАРАБЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

The problem of finding maximum of a linear function on nonconvex set of feasable solutions is considered. The estimate of suboptimality, criterion of lokal suboptumality and local optimality are proved.

I. Постановка задачи. Основные понятия.

Пусть $b \in R^m$; c, d_*, $d^* \in R^n$ – заданные векторы. Рассмотрим следующую задачу:

$$c'x = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x_j) = b, \tag{2}$$

$$d_* \leq x \leq d^*, \tag{3}$$

где

$$a_j(s) = \begin{cases} a_j^+ s + a_{0j}^+, & \text{если } s \geq x_{0j}; \\ a_{js}^- + a_{0j}^-, & \text{если } s < x_{0j}; \end{cases}$$

$a_j^+ x_{0j} + a_{0j}^- = a_j^- x_{0j} + a_{0j}^-$; a_j^+, a_{0j}^+, a_j^-, a_{0j}^- – заданные m-векторы, $x_0 = \{x_{0j}, j \in J\} \in (d_*, d^*)$, $J = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Определение 1. Планом задачи (1) – (3) назовем любой вектор $x \in R^n$, удовлетворяющий всем ее ограничениям.

Множество всех планов задачи (1) – (3) обозначим через X. В силу ограничений (2) множество X, вообще говоря, является невыпуклым и даже может состоять из многих непересекающихся множеств. Поэтому целесообразным является метод направленного перебора, который позволяет получить локально-оптимальный план задачи (1) – (3), т. е. такой план, на котором целевая функция достигает локального максимума.

Пусть $x \in X$ – некоторый план задачи (1) – (3). Определим для x следующие множества:

$$J^+ = J^+(x) = \{j \in J\colon\ x_j > x_{0j}\},\ J^- = J^-(x) =$$
$$= \{j \in J\colon\ x_j < x_{0j}\},\ J^0 = J^0(x) = \{j \in J\colon\ x_j = x_{0j}\}.$$

Пусть $J^{0+} \subseteq J^0(x)$, $J^{0-} = J^0(x) \setminus J^{0+}$. Обозначим

$$X(J^{0+}) = \{z \in R^n\colon \sum_{j \in J^+ \cup J^{0+}} (a_j^+ z_j + a_{0j}^+) + \sum_{j \in J^- \cup J^{0-}} (a_j^- z_j + a_{0j}^-) = b,$$
$$x_{0j} \leq z_j \leq d_j^*,\ j \in J^+ \cup J^{0+};\ d_{*j} \leq z_j \leq x_{0j},\ \ j \in J^- \cup J^{0-}\}. \tag{4}$$

Ясно, что $X(J^{0+}) \subseteq X$ – выпуклые многогранники, причем $x \in X(J^{0+})$

для любого $J^{0+} \subseteq J^0(x)$. Пусть $\bar{x} \in X$ – вектор, достаточно близкий к x, такой, что выполняются неравенства $\bar{x}_j > x_{0j}$, $j \in J^+(x)$, $\bar{x}_j < x_{0j}$, $j \in J^-(x)$. Обозначим $\Delta x = \bar{x} - x$, $\bar{J}^{0+} = \{j \in J^0(x)\colon \Delta x_j \geq 0\}$, $\bar{J}^{0-} = J^0(x) \setminus \bar{J}^{0+} = \{j \in J^0(x)\colon \Delta x_j < 0\}$. Тогда нетрудно видеть, что $x \in X(\bar{J}^{0+})$. Согласно этим фактам, план x является локально-оптимальным тогда и только тогда, когда он является оптимальным планом для всех множеств $X(J^{0+})$, $J^{0+} \subseteq J^0(x)$. Для проверки локальной оптимальности плана x, вообще говоря, нужно проверить оптимальность плана x на всех множествах $X(J^{0+})$, $J^{0+} \subseteq J^0(x)$.

Пусть $J^* \subseteq J$. Будем говорить, что множество J^* обладает свойством полноты, если для любого $J^{0+} \subseteq J^0(x)$ найдется подмножество $J_Б = J_Б(J^{0+}) \subseteq J^*$, $|J_Б| = m$, такое, что не вырождена матрица:

$$A_Б = A(I,\ J_Б) = \{a_j^+,\ j \in J_Б^+;\ a_j^-,\ j \in J_Б^-\}, \tag{5}$$

где $J^+_Б = J_Б \cap (J^+ \cup J^{0+})$, $J^-_Б = J_Б \cap (J^- \cup J^{0-})$.

Определение 2. Полное множество J^* называется минимальным, если свойство полноты теряется после удаления из него любого индекса.

Определение 3. Полное множество $J^* \subseteq J$ назовем локальной опорой для задачи (1) – (3) в точке x и обозначим через $J_{оп}$.

Пусть $J^{0+} \subseteq J^0(x)$. Множество $J_Б = J_Б(J^{0+}) \subseteq J_{оп}$, для которого не вырождена матрица $A(I, J_Б)$ из (5), называется субопорой в области $X(J^{0+})$, а сама матрица $A_Б$ – субопорной матрицей.

Определение 4. Пару $\{x, J_{оп}\}$ из плана x и локальной опоры $J_{оп}$ назовем опорным планом для задачи (1) – (3).

Пусть имеется некоторый опорный план $\{x, J_{оп}\}$, $J^{0+} \subseteq J^0(x)$, $J_Б = J_Б(J^{0+}) \subseteq J_{оп}$ – некоторая соответствующая опора. По опоре $A(1, J_Б)$ вычислим вектор потенциалов и оценки

$$u' = c'(J_Б) A_Б^{-1}, \tag{6}$$

$$\Delta_j^+ = u' a_j^+ - c_j,\ j \in J_н^+,$$

$$\Delta_j^- = u' a_j^- - c_j,\ j \in J_н^-, \tag{7}$$

где $J_н = J \setminus J_Б$, $J^+_н = J_н \cap (J^{0+} \cup J^+)$, $J^-_н = J_н \cap (J^- \cup J^{0-})$.

Вычислим число

$$\beta(J_Б(J^{0+})) = -\sum_{\Delta_j^+ < 0} \Delta_j^+ (d_j^* - x_j) - \sum_{\Delta_j^+ > 0} \Delta_j^+ (x_{0j} - x_j) -$$

$$- \sum_{\Delta_j^- < 0} \Delta_j^- (x_{0j} - x_j) - \sum_{\Delta_j^- > 0} \Delta_j^- (d_{*j} - x_j). \tag{8}$$

II. Критерий локальной оптимальности.

Теорема 1. Для локальной оптимальности плана x необходимо и достаточно, чтобы существовала локальная опора $J_{оп}$ такая, что для любого $J^{0+} \subseteq J^0(x)$ найдется субопора $J_Б = J_Б(J^{0+}) \subseteq J_{оп}$, для которой выполняется равенство $\beta(J_Б(J^{0+})) = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточность. Пусть $\bar{x}$ – некоторый план из достаточно малой окрестности x, $\Delta x = \bar{x} - x$. Тогда для Δx выполняются следующие неравенства:

$$d_{*j} - x_{0j} \leq \Delta x_j \leq d^*_j - x_{0j},\ j \in J^0(x),$$

$$d_{*j} - x_j \leq \Delta x_j \leq x_{0j} - x_j,\ j \in J^-(x), \tag{9}$$

$$x_{0j} - x_j \leq \Delta x_j \leq d^*_j - x_j,\ j \in J^+(x)$$

и равенство

$$\sum_{j \in J^+} a_j^+ \Delta x_j + \sum_{j \in J^-} a_j^- \Delta x_j + \sum_{j \in J^0} a_j(\Delta x_j) = 0, \tag{10}$$

где

$$a_j(\Delta x_j) = \begin{cases} a_j^+ \Delta x_j, & \text{если } \Delta x_j \geq 0, \\ a_j^- \Delta x_j, & \text{если } \Delta x_j < 0, \ j \in J^0. \end{cases}$$

Обозначим $J^{0+} = \{j \in J^0 \colon \Delta x_j \geq 0\}$, $J^{0-} = J^0 \setminus J^{0+}$. По условию теоремы, для J^{0+} существует субопора $J_Б \subseteq J_{оп}$, для которой число $\beta(J_Б(J^{0+}))$ из (8) равняется нулю. Из (10) и определения J^{0+} имеем:

$$\sum_{j \in J^+ \cup J^{0+}} a_j^+ \Delta x_j + \sum_{j \in J^- \cup J^{0-}} a_j^- \Delta x_j = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\Delta x(J_Б) = -A_Б^{-1}\Big(\sum_{j \in J_н^+} a_j^+ \Delta x_j + \sum_{j \in J_н^-} a_j^- \Delta x_j\Big).$$

Рассмотрим приращение целевой функции

$$c'\Delta x = \sum_{j=1}^{n} c_j \Delta x_j,$$

$$= -c'(J_Б)A_Б^{-1}\Big(\sum_{j \in J_н^+} a_j^+ \Delta x_j + \sum_{j \in J_н^-} a_j^- \Delta x_j\Big) + \sum_{j \in J_н} c_j \Delta x_j,$$

$$= -\sum_{j \in J_н^+} \Delta_j^+ \Delta x_j - \sum_{j \in J_н^-} \Delta_j^- \Delta x_j,$$

$$\leq -\sum_{\Delta_j^+ < 0} \Delta_j^+ (d_j^* - x_j) - \sum_{\Delta_j^+ > 0} \Delta_j^+ (x_{0j} - x_j) -$$

$$- \sum_{\Delta_j^- < 0} \Delta_j^- (x_{0j} - x_j) - \sum_{\Delta_j^- > 0} \Delta_j^- (d_{*j} - x_j) = \beta(J_Б(J^{0+})).$$

Отсюда получим $c'\Delta x \leq 0$, т. е. $c'\bar{x} \leq c'x$ для любого $\bar{x}$ из достаточно малой окрестности x, а это означает, что x – локально-оптимальный план для задачи (1) – (3).

Необходимость. Пусть x^0 – локально-оптимальный план задачи (1) – (3), $J^{0+} \subseteq J^0(x^0)$ – некоторое подмножество индексов. Рассмотрим задачу линейного программирования

$$c'x \to \max, \ x \in X(J^{0+}). \tag{11}$$

Ясно, что x^0 является оптимальным планом для задачи (11). Пусть $J_Б = J_Б(J^{0+}) \subseteq J$ – оптимальная опора для (11). Как известно из [1], вычисленные по опоре $J_Б$ оценки $\Delta(J_н) = \{\Delta^+_j, \ j \in J^+_н; \ \Delta^-_j, \ j \in J^-_н\}$ из (7) удовлетворяют равенству

$$-\sum_{\Delta_j^+ < 0} \Delta_j^+ (d_j^* - x_j^0) - \sum_{\Delta_j^+ > 0} \Delta_j^+ (x_{0j} - x_j^0) -$$

$$- \sum_{\Delta_j^- < 0} \Delta_j^- (x_{0j} - x_j^0) - \sum_{\Delta_j^- > 0} \Delta_j^- (d_{*j} - x_j^0) = \beta(J_Б(J^{0+})) = 0.$$

Обозначим $J_{оп} = \bigcup_{J^{0+} \subseteq J^0} J_Б(J^{0+})$. Нетрудно проверить, что $J_{оп}$ есть искомая локальная опора для локально-оптимального плана x^0. Теорема доказана.

Из теоремы 1 следует, что x^0 является локально-оптимальным планом задачи (1) – (3) тогда и только тогда, когда он является оптимальным планом для задачи (11) при любом $J^{0+} \subseteq J^0(x^0)$. Естественно считать x^0 локально-ϵ-оптимальным планом задачи (1) – (3), если он является ϵ-оптимальным для задачи (11) при любом $J^{0+} \subseteq J^0(x^0)$.

Справедлива

Теорема 2. (Критерий локальной ϵ-оптимальности).

План x^0 является локально-ϵ-оптимальным тогда и только тогда, когда существует локальная опора $J_{оп}$ такая, что для любого $J^{0+} \subseteq J^0(x^0)$ можно выделить субопору $J_Б = J_Б(J^{0+}) \subseteq J_{оп}$ такую, что $\{x^0, J_Б\}$ является ϵ-оптимальным опорным планом для задачи (11).

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1.

Теоремы 1, 2 дают необходимые и достаточные условия локальной оптимальности и локальной ϵ-оптимальности плана x. На первый взгляд, для проверки этих условий надо провести очень много вычислений, связанных с обращениями субопорных матриц и вычислениями оценок Δ_j, $j \in J_н$. На самом деле, количество вычислений может оказаться намного меньше. Во-первых, субопоры можно подобрать так, чтобы они отличались друг от друга одним столбцом. Тогда для обращения следующей субопорной матрицы можно использовать специальную процедуру, которая требует намного меньше вычислений. Во-вторых, некоторая субопора может служить опорой сразу для многих областей $X(J^{0+})$.

Действительно, пусть $J_Б = J_Б(J^{0+})$ – некоторая субопора в области $X(J^{0+})$. Положим $J_Б^0 = J_Б \cap J^0$, $J_н^0 = J^0 \setminus J_Б^0$, $J_Б^{0+} = J_Б \cap J^{0+}$. Построим множество $S^{0+} = \{\bar{J}^{0+} = J_Б^{0+} \cup \bar{J}^{0+},\ \bar{J}^{0+} \subseteq J_н^0\}$.

Нетрудно проверить, что $J_Б$ является субопорой во всех $X(\bar{J}^{0+})$, $\bar{J}^{0+} \in S^{0+}$, а количество элементов S^{0+}, как известно, будет $2^{|J^0{}_н|}$.
Кроме того, количество вычислений может сократиться в связи с тем, что сама субопора может оказаться оптимальной для нескольких множеств $X(\bar{J}^{0+})$, $\bar{J}^{0+} \in S^{0+}$.

В отдельных случаях с помощью одной субопоры можно определить локальную оптимальность или локальную ϵ-оптимальность плана x.

Пусть $J_Б = J_Б(J^{0+})$ – некоторая субопора в области $X(J^{0+})$. По субопорной матрице $A_Б$ вычислим вектор потенциалов и оценки

$$u' = c'(J_Б)A_Б^{-1},$$

$$\Delta_j^+ = u'a_j^+ - c_j,\ j \in J_н^+ \cup J^0,$$

$$\Delta_j^- = u'a_j^- - c_j,\ j \in J_н^- \cup J^0. \tag{12}$$

Теорема 3. Для локальной оптимальности опорного плана $\{x^0, J_{оп}\}$ достаточно, чтобы существовала субопора $J_Б = J_Б(J^{0+})$ для некоторого J^{0+} такая, что вычисляемые по ней оценки (12) удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{gathered}\Delta_j^+ \le 0 \text{ при } x^0_j = d^*_j,\ \Delta_j^+ = 0 \text{ при } x^0_j < d^*_j,\ j \in J^+{}_н \setminus J^0(x^0),\\ \Delta_j^- \ge 0 \text{ при } x^0_j = d_{*j},\ \Delta_j^- = 0 \text{ при } x^0_j > d_{*j},\ j \in J^-{}_н \setminus J^0(x^0).\end{gathered} \tag{13}$$

$$\Delta_j^+ \ge 0,\ \Delta_j^- \ge 0 \text{ при } j \in J^0(x^0). \tag{14}$$

Доказательство. Пусть $\bar{J}^{0+} \subseteq J^0(x^0)$ – произвольное подмножество индексов. Нам надо доказать, что x^0 является оптимальным планом для $X(\bar{J}^{0+})$. Рассмотрим расширенную задачу

$$f(x, y) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{j \in J^0(x^0)} c_j y_j \to \max,$$

$$\sum_{j \in J^+ \cup J^{0+}} (a_j^+ x_j + a_{0j}^+) + \sum_{j \in J^- \cup J^{0-}} (a_j^- x_j + a_{0j}^-) + \sum_{j \in \bar{J}^{0+}} a_j^+ y_j + \sum_{j \in \bar{J}^{0-}} a_j^- y_j = b,$$

$$\begin{gathered}x_{0j} \le x_j \le d^*_j,\ j \in J^+ \cup J^{0+};\ d_{*j} \le x_j \le x_{0j},\ j \in J^- \cup J^{0-},\\ 0 \le y_j \le d^*_j - x_{0j},\ j \in \bar{J}^{0+};\ d_{*j} - x_{0j} \le y_j \le 0,\ j \in \bar{J}^{0-}.\end{gathered} \tag{15}$$

Для задачи (15) рассмотрим опорный план $\{(x^0, 0(J^0)), J_Б\}$. Как известно из [1], в силу соотношений (13) – (14), $(x^0, 0(J^0))$ является оптимальным планом для задачи (15). Оптимальное значение целевой функции будет $f(x^0, 0) = c'x^0$.

Возьмем произвольный вектор $\bar{x} \in X(\bar{J}^{0+})$, построим вектор $(\bar{x}, \bar{y})$ следующим образом:

$$\bar{x}_j = x_{0j},\ j \in J^0(x^0);\ \bar{x}_j = \bar{x}_j,\ j \in J^+(x^0) \cup J^-(x^0),$$
$$\tilde{y}_j = \bar{x}_j - x_{0j},\ j \in J^0(x^0).$$

Докажем, что $(\bar{x}, \tilde{y})$ будет планом для задачи (15). Действительно, для $(\bar{x}, \tilde{y})$ выполняются все прямые ограничения.

Остается доказать, что для него выполняются и основные ограничения. Так как $\bar{x} \in X(\bar{J}^{0+})$, то имеем

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(\bar{x}_j) = \sum_{j \in J^+ \cup J^{0+}} (a_j^+ \bar{x}_j + a_{0j}^+) + \sum_{j \in J^- \cup J^{0-}} (a_j^- \bar{x}_j + a_{0j}^-) = b. \tag{16}$$

Рассмотрим вектор

$$s = \sum_{j \in \bar{J}^{0+}} (a_j^+ \bar{x}_j + a_{0j}^+) + \sum_{j \in \bar{J}^{0-}} (a_j^- \bar{x}_j + a_{0j}^-),$$

$$= \sum_{j \in \bar{J}^{0+}} (a_j^+ (x_{0j} + \tilde{y}_j) + a_{0j}^+) + \sum_{j \in \bar{J}^{0-}} (a_j^- (x_{0j} + \tilde{y}_j) + a_{0j}^-),$$

$$= \sum_{j \in \bar{J}^{0+}} a_j^+ \tilde{y}_j + \sum_{j \in \bar{J}^{0-}} a_j^- \tilde{y}_j + \sum_{j \in \bar{J}^{0+}} (a_j^+ x_{0j} + a_{0j}^+) + \sum_{j \in \bar{J}^{0-}} (a_j^- x_{0j} + a_{0j}^-).$$

Но поскольку $a^+_j x_{0j} + a^+_{0j} = a^-_j x_{0j} + a^-_{0j}$ для любого $j \in J$, то из последнего равенства получим:

$$s = \sum_{j \in \bar{J}^{0+}} a_j^+ \tilde{y}_j + \sum_{j \in \bar{J}^{0-}} a_j^- \tilde{y}_j + \sum_{j \in J^{0+}} (a_j^+ x_{0j} + a_{0j}^+) + \sum_{j \in J^{0-}} (a_j^- x_{0j} + a_{0j}^-).$$

Поставив полученное равенство в (16), получим:

$$\sum_{j \in J^+ \cup J^{0+}} (a_j^+ \bar{x}_j + a_{0j}^+) + \sum_{j \in J^- \cup J^{0-}} (a_j^- \bar{x}_j + a_{0j}^-) + \sum_{j \in J^{0+}} a_j^+ \tilde{y}_j + \sum_{j \in J^{0-}} a_j^- \tilde{y}_j = b.$$

Итак, показали, что $(\bar{x}, \tilde{y})$ является планом для задачи (15). Вычислим значения $f(\bar{x}, \tilde{y})$

$$f(\bar{x}, \tilde{y}) = c'\bar{x} + c'(J^0)\tilde{y} = c'\bar{x} \le f(x^0, 0) = c'x^0,$$

т. е. $c'\bar{x} \le c'x^0$ для любого $\bar{x} \in X(\bar{J}^{0+})$, что означает, что x^0 – оптимальный план для $X(\bar{J}^{0+})$.

Список литературы

1. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Методы линейного программирования. Ч. 1. Общие задачи. Мн., 1977.

Поступила в редакцию 23.12.91.

УДК 517.925.7

В. И. ГРОМАК, Ж. А. ЛУЦЕВИЧ

НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ, СВЯЗАННОЕ С УРАВНЕНИЕМ SINE-GORDON, И ТРЕТЬЕ УРАВНЕНИЕ ПЕНЛЕВЕ

By virtue of the reduction of the special one- and two-dimension partial differential equations to the third Painleve equation, their Backlund transformations and exact solutions are constructed.

А. В этой работе изучим некоторые свойства решений уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = ae^u + be^{-u} + xt(ce^{2u} + de^{-2u}), \tag{1}$$

где a, b, c, d – параметры в связи с установленной связью между решениями уравнения (1) и третьим уравнением Пенлеве.