Математика и механика

$\int \approx \sum$ $E(X|\mathcal{F})$ $\nabla \cdot \vec{v} = 0$

УДК 517.977

А. О. АБДУРАХИМОВ

ОПТИМИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ПО ПРИНЦИПУ ПОЛУЧЕНИЯ ГАРАНТИРОВАННОГО РЕЗУЛЬТАТА

Linear nonstationary dynamic system is considered on the family of quadratic terminal cost functions to obtain the guaranteed result. A package maximum principle is proved.

Постановка задачи. Пусть $J=\{1, \ldots, n\}$, $R=\{1, \ldots, r\}$, L, K^+_l, K^-_l, $l \in L$, – заданные конечные множества индексов, $K_l = K_l^+ \cup K_l^-$; L^+, L^-, – некоторые подмножества множества L: $L^+ \cup L^- = L$, $L^+ \cap L^- = \phi$; D_0, D_{kl}, $k \in K_l$, $l \in L$, – симметричные неотрицательные $n \times n$-матрицы; a_0, a_{kl}, $k \in K_l$, $l \in L$, – n-векторы; b_{kl}, $k \in K_l$, $l \in L$, – скаляры; $f_0(x) = x'D_0x/2 + a_0'x + b_0$, $f_{kl}(x) = x'D_{kl}x/2 + a_{kl}'x + b_{kl}$ – квадратичные функции n переменных $x = (x_j,\ j \in J)$.

В классе кусочно-непрерывных r-вектор-функций $u = u(.) = (u_r(t), r \in R)$, $t \in T = [t_*, t^*]$, рассмотрим непрерывную систему

$$\dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(t_*) = x_0, \tag{1}$$

$$u_* \leq u(t) \leq u^*, \quad t \in T, \tag{2}$$

где $x(t)$ – n-вектор состояния системы управления в момент времени t, x_0 – начальное состояние; $A(t)$, $B(t)$, $t \in T$, – непрерывные $n \times n$-, $n \times r$-матричные функции; u_*, u^*, – r-векторы ограничений на управляющие воздействия.

Кусочно-непрерывную функцию $u(t)$, $t \in T$, будем называть допустимым управлением, если она удовлетворяет неравенствам (2). Траектория $x(t)$, $t \in T$, уравнения (1), порожденная допустимым управлением, также называется допустимой [1].

На допустимом управлении $u(.) = (u(t),\ t \in T)$ вычислим (с помощью формулы Коши [2]) состояние системы в конечный момент времени t^*. Считая функции $f_{kl}(x)$, $x \in R^n$, $k \in K_l$, $l \in L$, компонентами критерия качества непрерывной задачи оптимального управления, гарантированным значением критерия качества на управлении $u(.)$ назовем число

$$J(u) = f(x(t^*)) = f_0(x(t^*)) + f^+(x(t^*)) + f^-(x(t^*)),$$

где

$$f^+(x) = \sum_{l \in L^+} f_l^+(x), \quad f_l^+(x) = \max_{k \in K_l^+} f_{kl}(x);$$

$$f^-(x) = \sum_{l \in L^-} f_l^-(x), \quad f_l^-(x) = \min_{k \in K_l^-} f_{kl}(x).$$

Задачу

$$J(u) = f(x(t^*)) \to \min_u, \tag{3}$$

$$\dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(t_*) = x_0 \tag{4}$$

$$u_* \le u(t) \le u^*, \ t \in T, \tag{5}$$

будем называть линейно-квадратичной задачей гарантированного управления непрерывной системой.

Определение 1. Допустимое управление $u^0(t)$, $t \in T$, и соответствующая ему траектория $x^0(t)$, $t \in T$, называются оптимальными, если $J(u^0) = f(x^0(t^*)) = \min f(x(t^*)) = \min J(u)$.

Сглаживание задачи. Пусть $u(t)$, $t \in T$, – допустимое управление задачи (3) – (5). На терминальном состоянии $x(t^*)$ подсчитаем числа

$$\omega_{kl}^+ = \omega_{kl}^+\left(x(t^*)\right) = f_l^+\left(x(t^*)\right) - f_{kl}\left(x(t^*)\right), \ k \in K_l^+;$$

$$\omega_{kl}^- = \omega_{kl}^-\left(x(t^*)\right) = f_l^-\left(x(t^*)\right) - f_{kl}\left(x(t^*)\right), \ k \in K_l^-.$$

Построим множества

$$K_l^{=+} = \left\{k \in K_l^+ : \omega_{kl}^+ = 0\right\}, \ K_l^{>+} = \left\{k \in K_l^+ : \omega_{kl}^+ > 0\right\}, \ l \in L^+;$$

$$K_l^{=-} = \left\{k \in K_l^- : \omega_{kl}^- = 0\right\}, \ K_l^{<-} = \left\{k \in K_l^- : \omega_{kl}^- < 0\right\}, \ l \in L^-.$$

Выбирая из каждого множества $K_l^{=+}$, $l \in L^+$ $\left(K_l^{=-},\ l \in L^-\right)$ по одному элементу $q^l(g^l)$, составим набор $p^+ = \{p_l^+,\ l \in L^+\}(p^- = \{p_l^-,\ l \in L^-\})$, где $p_l^+ = \{u(.),\ q^l\}$, $(p_l^- = \{u(.),\ g^l\})$. Пусть $p = \{p^+,\ p^-\}$, P – множество всевозможных наборов p, $\bar{u}(t) = u(t) + \Delta u(t)$, $t \in T$, – произвольное допустимое управление, $\bar{x}(t) = x(t) + \Delta x(t)$, $t \in T$, – соответствующая ему траектория. Следуя [3], для фиксированного элемента $p \in P$ составим задачу

$$\begin{gathered}
\Delta x'(t^*) D \Delta x(t^*)/2 + c' \Delta x(t^*) \to \min_{\Delta u}, \\
\Delta \dot{x} = A(t)\Delta x(t^*) + B(t)\Delta u(t), \ \Delta x(t_*) = 0, \\
u_* - u(t) \le \Delta u(t) \le u^* - u(t), \ t \in T, \\
\Delta x'(t^*) D_i \Delta x(t^*)/2 + c_i' \Delta x(t^*) \le \gamma_i, \ i \in I_*; \\
\Delta x'(t^*) D_i \Delta x(t^*)/2 + c_i' \Delta x(t^*) \ge \gamma_i, \ i \in I^*,
\end{gathered} \tag{6}$$

где

$$D = D_0 + \sum_{l \in L^+} D_{q^l l} + \sum_{l \in L^-} D_{g^l l},$$

$$a = a_0 + \sum_{l \in L^-} a_{q^l l} + \sum_{l \in L^-} a_{g^l l},$$

$$c = a + Dx(t^*); \ c_i = a_i + D_i x(t^*),$$

$$D_i = D_{kl} - D_{q^l l}, \ a_i = a_{kl} - a_{q^l l}, \ l \in L^+,$$

$$k \in K_l^+ \setminus q^l, \ i \in I_* = \bigcup_{l \in L^+} K_l^+ \setminus q^l;$$

$$D_i = D_{kl} - D_{g^l l}, \ a_i = a_{kl} - a_{g^l l}, \ l \in L^-,$$

$$k \in K_l^- \setminus g^l, \ i \in I^* = \bigcup_{l \in L^-} K_l^- \setminus g^l;$$

$$\gamma_i = \gamma_{kl} = \omega_{kl}^+\left(x(t^*)\right), \ l \in L^+, \ k \in K_l^+ \setminus q^l;$$

$$\gamma_i = \gamma_{kl} = \omega_{kl}^-\left(x(t^*)\right), \ l \in L^-, \ k \in K_l^- \setminus g^l.$$

Совокупность непрерывных задач оптимального управления (6), соответствующих всевозможным наборам $p \in P$, назовем сглаживанием задачи (3) – (5).

Задача (6) имеет, по крайней мере, одно допустимое управление $\Delta u(t) \equiv 0$, $t \in T$. Очевидно, что если $u^0(t)$, $t \in T$, – оптимальное управление задачи (3) – (5), то управление $\Delta u^0(t) \equiv 0$, $t \in T$, является оптимальным в задаче (6).

Опора. Опорное управление. Пусть $I_{оп}$ – произвольное подмножество множества $I = I_* \cup I^*$: $I_{оп} = I^*_{оп} \cup I_{*оп}$, $I^*_{оп} \subset I^*$, $I_{*оп} \subset I_*$. На отрезке T выберем конечное множество моментов $T_{оп} = \{t_j,\ j \in J_{оп}\}$, $t_j < t_{j+1}$, $J_{оп} \subset J$, $|J_{оп}| \le |I_{оп}|$. Каждому моменту t_j поставим в соответствие такой набор индексов $R_{оп}(t_j) \subset R^j_{оп} \subset R$, что $|I_{оп}| = |R_{оп}|$, $R_{оп} = \{R^j_{оп},\ j \in J_{оп}\}$. Введя обозначение $S_{оп} = \{T_{оп}, R_{оп}\}$, составим матрицу

$$\Phi_{оп} = \Phi(I_{оп}, S_{оп}) = (c_i(l(t_j)),\ i \in I_{оп},\ l \in R^j_{оп},\ j \in J_{оп}),$$

где

$$c_i(t) = B'(t)F'(t^*, t)(a_i + D_i x(t^*)),\ i \in I;$$

$F(t, \tau)$, $t, \tau \in T$, – фундаментальная матрица решений однородной части системы (4).

Определение 2. Совокупность $M_{оп}(p) = \{I_{оп}, S_{оп}\}$ назовем (локальной) опорой основных ограничений на управлении u (.), матрицу $\Phi_{оп} = \Phi(M_{оп}(p)) = \Phi(I_{оп}, S_{оп})$ – (локальной) опорной матрицей, если $\det\Phi_{оп} \ne 0$.

Определение 3. При фиксированном $p \in P$ пару $\{u(.), M_{оп}(p)\}$ из допустимого управления и опоры ограничений будем называть опорным управлением задачи (6). Опорное управление будет считаться невырожденным, если значения опорных компонент управления в опорные моменты некритические:

$$u_{*l} < u_l(t) < u^*_l,\ l \in R_{оп}(t),\ t \in T_{оп},$$

и выполняются неравенства

$$\gamma_i > 0,\ i \in I_{*н} = I_* \setminus I_{*оп};\ \gamma_i < 0,\ i \in I^*_н = I^* \setminus I^*_{оп}.$$

Пакетный принцип максимума. Пусть $\{u^0(.), M_{оп}(p)\}$ – невырожденное опорное управление, $\psi(t)$, $t \in T$, – решение сопряженной системы

$$\dot\psi = -A'(t)\psi,\ \psi(t^*) = H^{оп'}\nu_{оп} - Dx(t^*) - a, \tag{7}$$

где

$$\nu'_{оп} = \nu'(I_{оп}|u(.),\ p) = (c_l(t_j),\ j \in J_{(1)},\ l \in R)'\Phi^{-1}_{оп}$$

– вектор потенциалов,

$$c(t) = B'(t)F'(t^*, t)(a + Dx(t^*));$$

$$H^{оп} = (c_{ij},\ i \in I_{оп}).$$
$$\scriptstyle j \in З$$

Введем функцию $H(\psi, u, t) = -\psi' B(t)u$.

Обозначим через $P(M_{оп})$ совокупность наборов $p \in P$, для которых выполняются условия: а) максимума

$$H(\psi^0(t), u^0(t), t) = \max_{u_* \le u \le u^*} H(\psi^0(t), u, t),\ t \in T, \tag{8}$$

б) дополняющей нежесткости

$$\nu^0_i \gamma_i = 0,\ i \in I_{оп}, \tag{9}$$

с опорой $M_{оп}$. Тогда для локальной оптимальности в задаче (3) – (5) допустимого управления $u^0(t)$, $t \in T$, необходимо существование такого пакета опор $M^s_{оп}$, $s = \overline{1, \tau}$, что:

1) $\cup_{s=1}^{\tau} P(M^s_{оп}) = P$, $P(M^g_{оп}) \cap P(M^{\bar g}_{оп}) = \phi$, $g, \bar g = \overline{1, \tau}$, $g \ne \bar g$;

2) вдоль опорных управлений $\{u^0(.), M^s_{оп}\}$, $s = \overline{1, \tau}$, и соответствующих им траекторий $\psi^0(t, M^s_{оп}|p), t \in T, p \in P(M^s_{оп})$, $s = \overline{1, \tau}$, сопряженной системы (7) и векторов $\nu^0(M^s_{оп}|p)$, $p \in P(M^s_{оп})$, $s = \overline{1, \tau}$, выполняются условия (8), (9), [4].

Список литературы

1. Габасов Р., Кириллова Ф. М. и др. Конструктивные методы оптимизации. Мн., 1984—1987. Ч. 1—4.
2. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Оптимизация линейных систем. Мн., 1973.
3. Абдурахимов А. О. Гарантированная минимизация совокупности квадратичных функций // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1991. № 2. С. 67.
4. Абдурахимов А. О. Линейно-квадратичная задача оптимального управления с неопределенностью в критерии качества // Редкол. журн. «Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех.» Мн., 1991. 37 с. Деп. в ВИНИТИ 28.03.91. № 1369-B91.

Поступила в редакцию 15.11.91.

УДК 517.977

НГУЕН ДЫК ХИЕУ (ВЬЕТНАМ)

АДАПТИВНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ СЕПАРАБЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

The problem of finding maximum of a linear function on nonconvex set of feasable solutions is considered. The estimate of suboptimality, criterion of lokal suboptumality and local optimality are proved.

I. Постановка задачи. Основные понятия.

Пусть $b \in R^m$; c, d_*, $d^* \in R^n$ – заданные векторы. Рассмотрим следующую задачу:

$$c'x = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x_j) = b, \tag{2}$$

$$d_* \leq x \leq d^*, \tag{3}$$

где

$$a_j(s) = \begin{cases} a_j^+ s + a_{0j}^+, & \text{если } s \geq x_{0j}; \\ a_{js}^- + a_{0j}^-, & \text{если } s < x_{0j}; \end{cases}$$

$a_j^+ x_{0j} + a_{0j}^- = a_j^- x_{0j} + a_{0j}^-$; a_j^+, a_{0j}^+, a_j^-, a_{0j}^- – заданные m-векторы, $x_0 = \{x_{0j}, j \in J\} \in (d_*, d^*)$, $J = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Определение 1. Планом задачи (1) – (3) назовем любой вектор $x \in R^n$, удовлетворяющий всем ее ограничениям.

Множество всех планов задачи (1) – (3) обозначим через X. В силу ограничений (2) множество X, вообще говоря, является невыпуклым и даже может состоять из многих непересекающихся множеств. Поэтому целесообразным является метод направленного перебора, который позволяет получить локально-оптимальный план задачи (1) – (3), т. е. такой план, на котором целевая функция достигает локального максимума.

Пусть $x \in X$ – некоторый план задачи (1) – (3). Определим для x следующие множества:

$$J^+ = J^+(x) = \{j \in J: \ x_j > x_{0j}\}, \ J^- = J^-(x) = \\ = \{j \in J: \ x_j < x_{0j}\}, \ J^0 = J^0(x) = \{j \in J: \ x_j = x_{0j}\}.$$

Пусть $J^{0+} \subseteq J^0(x)$, $J^{0-} = J^0(x) \setminus J^{0+}$. Обозначим

$$X(J^{0+}) = \{z \in R^n: \sum_{j \in J^+ \cup J^{0+}} (a_j^+ z_j + a_{0j}^+) + \sum_{j \in J^- \cup J^{0-}} (a_j^- z_j + a_{0j}^-) = b, \\ x_{0j} \leq z_j \leq d_j^*, \ j \in J^+ \cup J^{0+}; \ d_{*j} \leq z_j \leq x_{0j}, \ \ j \in J^- \cup J^{0-}\}. \tag{4}$$

Ясно, что $X(J^{0+}) \subseteq X$ – выпуклые многогранники, причем $x \in X(J^{0+})$