

$$+ \int_0^x (\varphi(x) - \varphi(\tau)) \left(\frac{1}{x+h-\tau} - \frac{1}{x-\tau} \right) d\tau \leq I_1 + I_2 + I_3.$$

Оценим I_1, I_2, I_3 .

$$|I_1| \leq \|\varphi\|_k \int_x^{x+h} (x+h-\tau)^{k-1} d\tau \leq C \|\varphi\|_k h^k.$$

$$|I_2| \leq \|\varphi\|_k h^k \int_0^x \frac{d\tau}{x+h-\tau} \leq C \|\varphi\|_k h^k \ln \frac{1}{h}.$$

$$|I_3| \leq \|\varphi\|_k h^k \int_0^x \frac{(x-\tau)^{k-1}}{x+h-\tau} d\tau \leq h^k \|\varphi\|_k \int_0^x \frac{t^{k-1} dt}{t+1} \leq C \|\varphi\|_k h^k.$$

Из этих оценок следует, что

$$|(R\varphi)(x+h) - (R\varphi)(x)| \leq C_1 \|\varphi\|_k h^k \ln \frac{1}{h}.$$

Теорема доказана.

Замечание 2. Можно показать, что оператор R не ограничен в пространстве H^k .

Замечание 3. Свойства особого интеграла типа Коши в гильбертовых пространствах хорошо изучены. Поэтому из формулы (2) можно, учитывая доказанную выше теорему, выяснить действие оператора (3) в пространствах H^k .

Список литературы

1. Кашевский В. В. Линейные операторы в функциональных пространствах. Грозный, 1989. С. 79.
2. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Мн., 1987.

Поступила в редакцию 18. 06.91.

УДК 539.375

В. В. МИТЮШЁВ

УЧЕТ РАЗНОСТИ ДЛИН БЕРЕГОВ ТРЕЩИН В МЕХАНИКЕ РАЗРУШЕНИЯ

В математической теории трещин плоские трещины рассматриваются как разрезы на плоскости с берегами одинаковой длины (см. напр. [1,2]). Об измерении берегов трещины говорилось в [2. С. 34, 117]. Если рассматривать нормальный отрыв, то, естественно, малую разность длин берегов трещины можно положить равной нулю. Однако в случае поперечного сдвига даже незначительная разность длин берегов трещины может сыграть решающую роль в механизме разрушения.

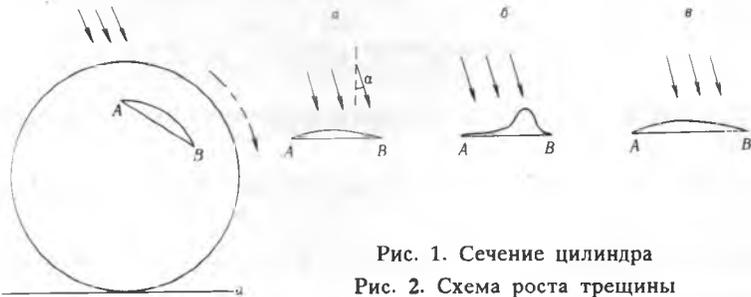


Рис. 1. Сечение цилиндра

Рис. 2. Схема роста трещины

Рассмотрим длинный цилиндр с трещиной (сечение изображено на рис. 1), который катится по поверхности a под действием сил, приложенных сверху цилиндра. Если верхний берег трещины длиннее нижнего, то разрушение будет происходить по схеме, изображенной на рис. 2.

Для математического моделирования описанной ситуации применим

теорию краевых задач аналитических функций [3]. Рассматриваем плоскую стационарную задачу в рамках линейной теории упругости. Пусть на комплексной плоскости w имеется контур L_w , изображенный на рис. 2, б. Нижний берег является отрезком $[-1; +1]$ действительной оси, описание верхнего берега будет дано через отображающую функцию. Конформное отображение единичного круга $|z| < 1$ на область D , внешность контура L_w строится по схеме [4]:

$$w = w(z) = \frac{1}{2} \left[e^{\epsilon} z \left(1 - \frac{\gamma}{2} - \gamma z \right) + \frac{e^{-\epsilon}}{z \left(1 - \frac{\gamma}{2} - \gamma z \right)} \right],$$

где $\epsilon = \frac{\pi}{5}$, $\gamma = 0,12$.

Пусть область D заполнена упругим материалом. Для упрощения математической модели задачи считаем, что напряжения на контуре L_w равны нулю, т. е. не учитываем взаимодействие между берегами трещины. На бесконечности заданы сжимающие напряжения (N_1, N_2) , направленные под углом α к оси OX . В соответствии с [3] требуется найти функции $\varphi(w)$ и $\psi(w)$, аналитические в области D , по краевому условию

$$\varphi(t) + t \overline{\varphi'(t)} + \overline{\varphi(t)} = 0, \quad t \in L_w. \quad (1)$$

Функции $\varphi'(w)$ и $\psi(w)$ непрерывны в замыкании области D , за исключением точек $w = \pm 1$, где возможны интегрируемые особенности. На бесконечности имеем следующие условия [3. С. 124]:

$$\varphi(w) = \frac{w}{4} (N_1 + iN_2) + \varphi_0(w),$$

$$\psi(w) = -\frac{w}{2} (N_1 - iN_2) e^{-2\epsilon} + \psi_0(w), \quad w \rightarrow \infty.$$

Функции $\varphi_0(w)$ и $\psi_0(w)$ аналитичны в точке $w = \infty$ и обращаются там в нуль. После конформного отображения области D на круг $|z| < 1$ задача (1) примет вид:

$$\overline{\varphi_1\left(\frac{1}{\zeta}\right)} + \frac{\overline{w\left(\frac{1}{\zeta}\right)}}{w'\left(\zeta\right)} \varphi_1'(\zeta) + \psi_1(\zeta) = \quad (2)$$

$$= \frac{1}{2} (N_1 - iN_2) e^{-2\epsilon} w(\zeta) - \frac{1}{2} N_1 \overline{w\left(\frac{1}{\zeta}\right)}, \quad |\zeta| = 1,$$

где $\varphi_1(z) = \varphi_0(w)$, $\psi_1(z) = \psi_0(w)$. Коэффициент при $\varphi_1'(\zeta)$ в краевом условии (2) является рациональной функцией, поэтому применима схема [3] к задаче (2). После решения этой задачи коэффициенты интенсивности K_I и K_{II} вычисляются по формуле [6. С. 33]:

$$K_I^{(1,2)} - iK_{II}^{(1,2)} = \frac{2\sqrt{\pi} \varphi_1'(\zeta_{1,2})}{\sqrt{w''(\zeta_{1,2})}},$$

где

$$\zeta_1 = e^{-\epsilon} \left(1 + \frac{\gamma}{2} \right) + \gamma e^{2\epsilon}, \quad \zeta_2 = -e^{-\epsilon} \left(1 + \frac{\gamma}{2} \right) + \gamma e^{2\epsilon}$$

— образы точек $w = +1$ и $w = -1$ соответственно при конформном отображении,

$$\varphi_1(\zeta) = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{e^{2\epsilon + \epsilon}}{2 - \gamma} + \zeta e^{\epsilon} (2 - \gamma - 2\gamma\zeta) + \frac{\gamma^2 \zeta e^{-\epsilon}}{2 - \gamma - 2\gamma\zeta} \right\} + \frac{q\zeta}{1 - \zeta_0\zeta},$$

постоянная q определяется по схеме [3], $\zeta_0 = \gamma \left(-\frac{\gamma}{2} \right)^{-1}$. Нарис. 3 приведены графики функций

$$p_{1,2}(\alpha) = \frac{K_{Ic}}{K_I^{(1,2)}(\alpha) \sqrt{1}} \cdot \left[f_0 \left(\frac{K_{II}^{(1,2)}(\alpha)}{K_I^{(1,2)}(\alpha)} \right) \right]^{-1},$$

где

$$f_0(\lambda) = 4\sqrt{2} \lambda^3 \frac{1 + 3\sqrt{1 + 8\lambda^2}}{(12\lambda^2 + 1 - \sqrt{1 + 8\lambda^2})^{3/2}},$$

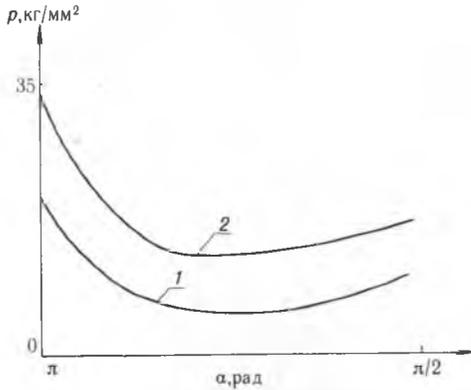


Рис. 3. Зависимость критической нагрузки от направления сжимающей силы (1—в точке В, 2—в точке А)

$K_{1c} = 273 \frac{\text{кГ}}{\text{мм}^{3/2}}$ — вязкость разрушения стали [1. С. 607]; $l = 1\text{мм}$ — половина длины трещины; $(N_1, N_2) = (-p_{1,2}(\alpha), 0)$, $p_{1,2}(\alpha)$ — критическая нагрузка на бесконечности, при которой происходит хрупкое разрушение [1. С. 151] в точках В и А соответственно. Графики показывают, что разрушение происходит в точке В.

Список литературы

1. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М., 1974.
 2. Механика разрушения и прочность материалов: Справочное пособ. Киев, 1988. Т. 1.
 3. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., 1966.
 4. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., 1973.
 5. Черепанов Г. П. // ПММ. 1966. Т. 30. № 1. С. 82.
 6. Механика разрушения и прочность материалов: Справочное пособ. Киев, 1988. Т. 2.
- Поступила в редакцию 30.09.91.

УДК 517.538.3

И. Н. БРУЙ

О КЛАССАХ НАСЫЩЕНИЯ НЕКОТОРЫХ МЕТОДОВ СУММИРОВАНИЯ РЯДОВ ФАБЕРА

Пусть метод суммирования μ определен последовательностью $\mu_m(\xi)$, $m \in \mathbb{Z}_0$, функций, заданных на некотором множестве Ξ изменения параметра ξ с точкой сгущения ω . Например, для метода Фейера $\mu_m(\xi) = \max(0; 1 - m(\xi + 1)^{-1})$, где параметр ξ пробегает множество $\Xi = \mathbb{Z}_0$ с точкой сгущения $\omega = +\infty$, а для метода Абеля — Пуассона $\mu_m(\xi) = \xi^m$, где множество $\Xi = [0; 1[$ и точка сгущения $\omega = 1$.

И пусть функции $\mu_m(\xi)$ удовлетворяют условию

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad 1 - \mu_m(\xi) = \left(\sum_{l=0}^m b_l(\mu) \cdot m^l \right) \cdot \epsilon_m(\xi) + o(\epsilon_m(\xi)), \quad \xi \rightarrow \omega, \quad (1)$$

где число $l \in \mathbb{N}$, коэффициент $b_l(\mu) \neq 0$ и положительная функция $\epsilon_m(\xi)$ монотонно стремится к нулю при $\xi \rightarrow \omega$.

Теорема. Пусть $G \subset \mathbb{C}$ — жорданова область со спрямляемой границей. И пусть метод суммирования μ рядов Фабера

$$f \sim \sum_{m=0}^{+\infty} a_m(f; \bar{G}) p_m(\bar{G}; z) \quad (2)$$

(определение последних см. в [1. С. 366] или [2. С. 107]) удовлетворяет условию (1). Тогда: