



УДК 517.948

В. В. КАШЕВСКИЙ

ИНТЕГРАЛЬНО-РАЗНОСТНЫЙ ОПЕРАТОР В ГЕЛЬДЕРОВСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

В тезисах автора [1] получено интегральное представление

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi(x) \ln|x-t|}{x-t} dx = -\frac{\pi^2}{2} \varphi(t) + \ln|1-t| \int_{-1}^1 \frac{\varphi(x) dx}{x-t} -$$

$$- \int_{-1}^1 \frac{dx}{x-t} \int_{-1}^x \frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{y-x} dy + \int_{-1}^1 \frac{\varphi(x) \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|}{x-t} dx. \quad (1)$$

Из (1) нетрудно получить

$$(S_{\ln} \varphi)(t) = -\frac{\pi^2}{2} \varphi(t) + \ln(1-t) \int_0^1 \frac{\varphi(x) dx}{x-t} -$$

$$- \int_0^1 \frac{(R\varphi)(x)}{x-t} dx + \int_0^1 \ln \frac{x}{1-x} \cdot \frac{\varphi(x)}{x-t} dx, \quad (2)$$

где введены следующие обозначения:

$$(S_{\ln} \varphi)(t) = \int_0^1 \frac{\varphi(x) \ln|x-t|}{x-t} dx, \quad (3)$$

$$(R\varphi)(t) = \int_0^1 \frac{\varphi(x) - \varphi(t)}{x-t} dx, \quad t \in [0, 1]. \quad (4)$$

Чтобы узнать свойства сингулярного оператора (2), нужно изучить оператор R .

Определение [2. С. 24]. Функция f , заданная на $[0, 1]$, принадлежит классу $H^{k,n}([0, 1]) = H^{k,n}$, если найдется $A > 0$, что

$$|f(x+h) - f(x)| \leq A |h|^k (\ln|h|^{-1})^n, \quad |h| < \frac{1}{2}$$

для всех $x, x+h \in [0, 1]$. Здесь $0 < k \leq 1, n \geq 0$.

Замечание 1. [2. С. 24] Если ввести в $H^{k,n}$ норму

$$\|f\|_{k,n} = \max_{x \in [0,1]} |f(x)| + \sup_{x, x+h \in [0,1]} |f(x+h) - f(x)| \cdot |h|^{-k} (\ln|h|^{-1})^{-n},$$

то $H^{k,n}$ будет банаховым пространством ($H^{k,0} = H^k$).

Теорема. Оператор R , задаваемый формулой (4), ограничен из пространства H^k в пространство $H^{k,1}$.

Доказательство. Пусть $0 < h < \frac{1}{2}; x, x+h \in [0, 1]$. Тогда

$$(R\varphi)(x+h) - (R\varphi)(x) = \int_x^{x+h} \frac{\varphi(x+h) - \varphi(\tau)}{x+h-\tau} d\tau + \int_0^x \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{x+h-\tau} d\tau +$$

$$+ \int_0^x (\varphi(x) - \varphi(\tau)) \left(\frac{1}{x+h-\tau} - \frac{1}{x-\tau} \right) d\tau \leq I_1 + I_2 + I_3.$$

Оценим I_1, I_2, I_3 .

$$|I_1| \leq \|\varphi\|_k \left| \int_x^{x+h} (x+h-\tau)^{k-1} d\tau \right| \leq C \|\varphi\|_k h^k.$$

$$|I_2| \leq \|\varphi\|_k h^k \int_0^x \frac{d\tau}{x+h-\tau} \leq C \|\varphi\|_k h^k \ln \frac{1}{h}.$$

$$|I_3| \leq \|\varphi\|_k h \int_0^x \frac{(x-\tau)^{k-1}}{x+h-\tau} d\tau \leq h^k \|\varphi\|_k \int_0^{\infty} \frac{t^{k-1} dt}{t+1} \leq C \|\varphi\|_k h^k.$$

Из этих оценок следует, что

$$|(R\varphi)(x+h) - (R\varphi)(x)| \leq C_1 \|\varphi\|_k h^k \ln \frac{1}{h}.$$

Теорема доказана.

Замечание 2. Можно показать, что оператор R не ограничен в пространстве H^k .

Замечание 3. Свойства особого интеграла типа Коши в гильбертовских пространствах хорошо изучены. Поэтому из формулы (2) можно, учитывая доказанную выше теорему, выяснить действие оператора (3) в пространствах H^k .

Список литературы

1. Кашевский В. В. Линейные операторы в функциональных пространствах. Грозный, 1989. С. 79.
2. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Мн., 1987.

Поступила в редакцию 18. 06.91.

УДК 539.375

В. В. МИТЮШЁВ

УЧЕТ РАЗНОСТИ ДЛИН БЕРЕГОВ ТРЕЩИН В МЕХАНИКЕ РАЗРУШЕНИЯ

В математической теории трещин плоские трещины рассматриваются как разрезы на плоскости с берегами одинаковой длины (см. напр. [1,2]). Об измерении берегов трещины говорилось в [2. С. 34, 117]. Если рассматривать нормальный отрыв, то, естественно, малую разность длин берегов трещины можно положить равной нулю. Однако в случае поперечного сдвига даже незначительная разность длин берегов трещины может сыграть решающую роль в механизме разрушения.

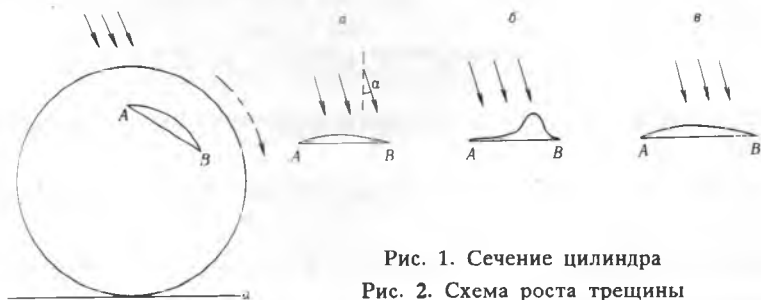


Рис. 1. Сечение цилиндра

Рис. 2. Схема роста трещины

Рассмотрим длинный цилиндр с трещиной (сечение изображено на рис. 1), который катится по поверхности a под действием сил, приложенных сверху цилиндра. Если верхний берег трещины длиннее нижнего, то разрушение будет происходить по схеме, изображенной на рис. 2.

Для математического моделирования описанной ситуации применим