

Регулятор, построенный по приведенным выше правилам ($\nu = 0,1$), работал управления $u^*(t), v^*, t \in T$ точками переключения: $t_u^* = \{1.6, 2.89, 7.3, 9.110673\}$, $t_v^* = \{3.09, 3.36, 7.11, 7.789931, 11.077541, 12.232814\}$, причем $u^*(+0) = v^*(+0) = 0$.

Фазовые траектории возмущенных систем представлены на рис. 2. Системы встретились в точке $x^*(t^*) = y^*(t^*) = -2.29199$, $\dot{x}^*(t^*) = \dot{y}^*(t^*) = -2.07766$.

Значение критерия качества оказалось равным $J^0 = 5.205877$.

Список литературы

1. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Конструктивные методы оптимизации. Мн., 1984. Ч. 2.
2. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Костюкова О. И. // Докл. АН СССР. 1991, Т. 320. № 6.

Поступила в редакцию 10.01.91.

УДК 519.24

Н. Н. ТРУШ, А. П. СКИПКО

ВЫЧИСЛЕНИЕ МОМЕНТОВ МОДИФИЦИРОВАННОГО КОНЕЧНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ МНОГОМЕРНЫХ ОДНОРОДНЫХ ПОЛЕЙ

Рассмотрим q -мерное однородное действительное случайное поле

$$X(\bar{t}) = \{X_1(\bar{t}), \dots, X_q(\bar{t})\}, \text{ где } \bar{t} = (t_1, \dots, t_n);$$

$$t_i \in Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}; i = \overline{1, n}.$$

Будем предполагать, что $MX(\bar{t}) = 0$.

Смешанный момент k -го порядка компонент рассматриваемого случайного поля $X(\bar{t})$, $t \in Z^n$, определим следующим образом:

$$m_{a_1 \dots a_k}(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_k) = MX_{a_1}(\bar{t}_1) \dots X_{a_k}(\bar{t}_k), \bar{t}_j \in Z^n, a_j = \overline{1, q}, j = \overline{1, k}. \quad (1)$$

Для определения смешанного семинварианта k -го порядка, согласно [3], воспользуемся соотношением:

$$c_{a_1 \dots a_k}(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_k) = \sum_{i_1 + \dots + i_p = 1}^p \prod_{r=1}^p (-1)^{i_r} (i_r - 1)! m_{a_{i_1} \dots a_{i_r}}(\bar{t}_{i_1}, \dots, \bar{t}_{i_r}),$$

где

$$I = \{1, 2, \dots, k\}, I_r \subseteq I, I_r = \{i_1, \dots, i_{l_r}\}, a_{i_j} = \overline{1, q}, j = \overline{1, l_r}, 1 \leq r \leq p,$$

l_r принимает целочисленные значения, а $\sum_{i_1 + \dots + i_p = 1}^p$ означает суммирование

по всем упорядоченным непересекающимся разбиениям I_r множества I . В тех же обозначениях существует и обратное соотношение:

$$m_{a_1 \dots a_k}(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_k) = \sum_{i_1 + \dots + i_p = 1}^p \prod_{r=1}^p c_{a_{i_1} \dots a_{i_r}}(\bar{t}_{i_1}, \dots, \bar{t}_{i_r}). \quad (2)$$

Для однородных случайных полей как смешанные моменты, так и смешанные семинварианты инвариантны по сдвигам:

$$m_{a_1 \dots a_k}(\bar{t}_1 + \bar{u}, \dots, \bar{t}_k + \bar{u}) = m_{a_1 \dots a_k}(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_k),$$

$$c_{a_1 \dots a_k}(\bar{t}_1 + \bar{u}, \dots, \bar{t}_k + \bar{u}) = c_{a_1 \dots a_k}(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_k),$$

для любых

$$\bar{u} \in R^n, \bar{t}_j \in Z^n, a_j = \overline{1, q}, j = \overline{1, k}.$$

Пусть существует неотрицательная, непрерывная функция

$$f_{a_1 \dots a_k}(\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_k),$$

$$\bar{\lambda}_j = (\lambda_{j1}, \dots, \lambda_{jn}), \lambda_{ji} \in \Pi = [-\pi, \pi], i = \overline{1, n}, j = \overline{1, k},$$

для которой смешанный семиинвариант k -го порядка имеет следующее представление:

$$c_{a_1 \dots a_k}(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_k) = \int_{\Pi^{kn}} \dots \int f_{a_1 \dots a_k}(\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_k) \exp \left\{ i \sum_{j=1}^k (\bar{\lambda}_j, \bar{t}_j) \right\} \times \\ \times \delta^* \left(\sum_{j=1}^k \bar{\lambda}_j \right) d\bar{\lambda}_1 \dots d\bar{\lambda}_k, \quad (3)$$

где

$$(\bar{\lambda}_j, \bar{t}_j) = \sum_{i=1}^n \lambda_{ji} t_{ji}, \lambda_{ji} \in \Pi, t_{ji} \in \mathbb{Z}, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, k}.$$

Тогда эту функцию будем называть семиинвариантной спектральной плотностью k -го порядка.

В выражении (3)

$$\delta^*(\bar{\lambda}) = \sum_{\Gamma} \delta(\bar{\lambda} - 2\pi\bar{\Gamma}), \bar{\lambda} \in \Pi^n, \bar{\Gamma} \in \mathbb{Z}^n, \quad (4)$$

где $\delta(\bar{\lambda})$ – дельта-функция Дирака, а $\sum_{\Gamma}$ означает суммирование по всем

$l_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, i = \overline{1, n}$. Причем n -мерная δ -функция Дирака определяется как произведение одномерных δ -функций Дирака.

Лемма. Пусть функция $g(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k)$, $\bar{x}_j \in \mathbb{R}^n$, $j = \overline{1, k}$ – 2π -периодична по каждому из аргументов и интегрируема. Тогда справедливо следующее тождество:

$$\int_{\Pi^{kn}} \dots \int g(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k) \delta^*(\bar{x}_1 + \dots + \bar{x}_k) d\bar{x}_1 \dots d\bar{x}_k = \\ = \int_{\Pi^{(k-1)n}} \dots \int g(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{k-1}, -\bar{x}_1 - \dots - \bar{x}_{k-1}) d\bar{x}_1 \dots d\bar{x}_{k-1}. \quad (5)$$

Доказательство. Перепишем левую часть соотношения (5) в следующем виде:

$$\int_{\Pi^{(k-1)n}} \dots \int \left(\int_{\Pi^n} g(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k) \delta^*(\bar{x}_1 + \dots + \bar{x}_k) d\bar{x}_k \right) d\bar{x}_1 \dots d\bar{x}_{k-1}.$$

С учетом соотношения (4) интеграл в скобках запишем в виде:

$$\int_{\Pi^n} g(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k) \sum_{\Gamma} \delta(\bar{x}_1 + \dots + \bar{x}_k - 2\pi\bar{\Gamma}) d\bar{x}_k.$$

Вынося сумму за знак интеграла и делая замену переменных интегрирования $\bar{x}_{ki} - 2\pi l_i = \bar{z}_{ki}$, $i = \overline{1, n}$, получим:

$$\sum_{\Gamma} \int g(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{k-1}, \bar{z}_k + 2\pi\bar{\Gamma}) \delta(\bar{x}_1 + \dots + \bar{x}_{k-1} + \bar{z}_k) d(\bar{z}_k + 2\pi\bar{\Gamma}),$$

$$\prod_{i=1}^n \Pi_{l_i}$$

где $\Pi_{l_i} = [-\pi - 2\pi l_i, \pi - 2\pi l_i]$. В силу 2π -периодичности функции $g(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k)$ имеем:

$$\sum_{\Gamma} \int g(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{k-1}, \bar{z}_k) \delta(\bar{x}_1 + \dots + \bar{x}_{k-1} + \bar{z}_k) d\bar{z}_k = \\ \prod_{i=1}^n \Pi_{l_i}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} g(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{k-1}, \bar{z}_k) \delta(\bar{z}_k - (-\bar{x}_1 - \dots - \bar{x}_{k-1})) d\bar{z}_k. \quad (6)$$

Используя свойства δ -функций, получим, что правая часть равенства (6) равна $g(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{k-1}, -\bar{x}_1 - \dots - \bar{x}_{k-1})$. Лемма доказана.

Далее для каждой из компонент случайного поля $X(\bar{t})$, $\bar{t} \in \mathbb{Z}^n$, будем рассматривать выборки наблюдений $X_{a_j}(\bar{t})$, где

$$t_i = \overline{0}, \quad T_{a_j} - 1, \quad i = \overline{1, n},$$

T_{a_j} — число наблюдений, $a_j = \overline{1, q}$.

Введем в рассмотрение статистику, которую назовем модифицированным конечным преобразованием Фурье наблюдений случайного поля $X(\bar{t})$:

$$d_X(\bar{\lambda}) = \{d_1(\bar{\lambda}), \dots, d_q(\bar{\lambda})\},$$

где

$$d_a(\bar{\lambda}) = \left[(2\pi)^n \sum_{\bar{t}} h_a^2\left(\frac{\bar{t}}{K_{T_a}}\right) \right]^{-1/2} \times \\ \times \sum_{\bar{t}} h_a\left(\frac{\bar{t}}{K_{T_a}}\right) \exp\{-i(\bar{\lambda}, \bar{t})\} X_a(\bar{t}), \quad (7)$$

$\bar{\lambda} \in \prod^n$, $h_a\left(\frac{\bar{t}}{K_{T_a}}\right)$ — окно просмотра данных, $\frac{\bar{t}}{K_{T_a}} = \left(\frac{t_1}{K_{T_a}}, \dots, \frac{t_n}{K_{T_a}}\right)$, K_{T_a} — неотрицательное целое число, зависящее от числа наблюдений T_a , а $\sum_{\bar{t}}$ везде далее (если не указано другое) будет означать суммирование по всем

$$t_i = \overline{0, K_{T_a} - 1}, \quad i = \overline{1, n}, \quad a = \overline{1, q}.$$

Далее будем пользоваться обозначением:

$$\varphi_a(\bar{\lambda}) = \sum_{\bar{t}} h_a\left(\frac{\bar{t}}{K_{T_a}}\right) \exp\{-i(\bar{\lambda}, \bar{t})\}, \quad \text{где } \bar{\lambda} \in \prod^n, \quad a = \overline{1, q}, \quad (8)$$

и будем записывать $T_j = T_{a_j}$, $a_j = \overline{1, q}$.

Теорема. Справедливо следующее тождество:

$$\text{cum}\{d_{a_1}(\bar{\lambda}_1), \dots, d_{a_k}(\bar{\lambda}_k)\} = \int_{\prod^{(k-1)n}} \dots \int f_{a_1} \dots f_{a_k}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{k-1}) \times \\ \times \Phi_{a_1} \dots \Phi_{a_k}(\bar{x}_1 - \bar{\lambda}_1, \dots, \bar{x}_{k-1} - \bar{\lambda}_{k-1}, \sum_{j=1}^{k-1} \bar{x}_j + \bar{\lambda}_k) d\bar{x}_1 \dots d\bar{x}_{k-1},$$

где

$$\Phi_{a_1} \dots \Phi_{a_k}(\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_k) = \left[(2\pi)^{kn} \sum_{\bar{t}_1} h_{a_1}^2\left(\frac{\bar{t}_1}{K_{T_1}}\right) \dots \sum_{\bar{t}_k} h_{a_k}^2\left(\frac{\bar{t}_k}{K_{T_k}}\right) \right]^{-1/2} \times \\ \times \prod_{j=1}^{k-1} \varphi_{a_j}(\bar{\lambda}_j) \times \overline{\varphi_{a_k}(\bar{\lambda}_k)},$$

$d_{a_j}(\bar{\lambda}_j)$ и $\varphi_{a_j}(\bar{\lambda}_j)$ задаются соотношениями (7) и (8) соответственно,

$$\bar{\lambda}_j \in \prod^n, \quad t_{ji} = \overline{0, K_{T_j} - 1}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, k}.$$

Доказательство. Подставим развернутые выражения для модифицированного конечного преобразования Фурье, согласно (7), и воспользуемся одним из свойств кумулянтов, приведенных в работе [1]:

$$\text{cum}(k_1 X_1, \dots, k_r X_r) = k_1 \dots k_r \times \text{cum}(X_1, \dots, X_r),$$

где k_j , $j = \overline{1, r}$ — постоянные, тогда

$$\begin{aligned} & \text{cum} \{ d_{a_1}(\bar{\lambda}_1), \dots, d_{a_k}(\bar{\lambda}_k) \} = \\ & = \left[(2\pi)^{kn} \sum_{\bar{t}_1} h_{a_1}^2 \left(\frac{\bar{t}_1}{K_{T_1}} \right) \dots \sum_{\bar{t}_k} h_{a_k}^2 \left(\frac{\bar{t}_k}{K_T} \right) \right]^{-1/2} \times \\ & \times \text{cum} \left\{ \sum_{\bar{t}_1} h_{a_1} \left(\frac{\bar{t}_1}{K_{T_1}} \right) \exp \{ -i(\bar{\lambda}_1, \bar{t}_1) \} X_{a_1}(\bar{t}_1), \dots \right. \\ & \left. \dots, \sum_{\bar{t}_k} h_{a_k} \left(\frac{\bar{t}_k}{K_{T_k}} \right) \exp \{ -i(\bar{\lambda}_k, \bar{t}_k) \} X_{a_k}(\bar{t}_k) \right\}. \end{aligned}$$

Из свойств кумулянтов:

$$\text{cum}(X_1 + Y, X_2, \dots, X_r) = \text{cum}(X_1, X_2, \dots, X_r) + \text{cum}(Y, X_2, \dots, X_r),$$

поэтому далее запишем:

$$\begin{aligned} & \left[(2\pi)^{kn} \sum_{\bar{t}_1} h_{a_1}^2 \left(\frac{\bar{t}_1}{K_{T_1}} \right) \dots \sum_{\bar{t}_k} h_{a_k}^2 \left(\frac{\bar{t}_k}{K_{T_k}} \right) \right]^{-1/2} \times \\ & \times \sum_{\bar{t}_1} h_{a_1} \left(\frac{\bar{t}_1}{K_{T_1}} \right) \exp \{ -i(\bar{\lambda}_1, \bar{t}_1) \} \times \dots \times \\ & \times \sum_{\bar{t}_k} h_{a_k} \left(\frac{\bar{t}_k}{K_{T_k}} \right) \exp \{ -i(\bar{\lambda}_k, \bar{t}_k) \} \times \text{cum} \{ X_{a_1}(\bar{t}_1), \dots, X_{a_k}(\bar{t}_k) \}, \end{aligned}$$

но

$$\text{cum} \{ X_{a_1}(\bar{t}_1), \dots, X_{a_k}(\bar{t}_k) \} = c_{a_1 \dots a_k}(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_k).$$

Воспользуемся представлением (3) и, меняя порядок суммирования и интегрирования, запишем:

$$\begin{aligned} & \left[(2\pi)^{kn} \sum_{\bar{t}_1} h_{a_1}^2 \left(\frac{\bar{t}_1}{K_{T_1}} \right) \dots \sum_{\bar{t}_k} h_{a_k}^2 \left(\frac{\bar{t}_k}{K_{T_k}} \right) \right]^{-1/2} \times \\ & \times \int_{\Pi^{kn}} \dots f_{a_1 \dots a_k}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k) \times \\ & \times \sum_{\bar{t}_1} h_{a_1} \left(\frac{\bar{t}_1}{K_{T_1}} \right) \exp \{ i(\bar{x}_1 - \bar{\lambda}_1, \bar{t}_1) \} \times \\ & \dots \times \sum_{\bar{t}_k} h_{a_k} \left(\frac{\bar{t}_k}{K_{T_k}} \right) \exp \{ i(\bar{x}_k - \bar{\lambda}_k, \bar{t}_k) \} \times \delta^* \left(\sum_{j=1}^k \bar{x}_j \right) d\bar{x}_1 \dots d\bar{x}_k. \end{aligned}$$

Перепишем выражение, используя обозначение (8):

$$\begin{aligned} & \left[(2\pi)^{kn} \sum_{\bar{t}_1} h_{a_1}^2 \left(\frac{\bar{t}_1}{K_{T_1}} \right) \dots \sum_{\bar{t}_k} h_{a_k}^2 \left(\frac{\bar{t}_k}{K_{T_k}} \right) \right]^{-1/2} \times \\ & \times \int_{\Pi^{kn}} \dots f_{a_1 \dots a_k}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k) \times \\ & \times \delta^* \left(\sum_{j=1}^k \bar{x}_j \right) \prod_{j=1}^k \varphi_{a_j}(\bar{x}_j - \bar{\lambda}_j) \times d\bar{x}_1 \dots d\bar{x}_k. \end{aligned}$$

Применяя лемму и обозначение

$$f_{a_1 \dots a_k}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{k-1}, -\bar{x}_1 - \dots - \bar{x}_{k-1}) = f_{a_1 \dots a_k}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{k-1}),$$

получим

$$\text{cum} \{ d_{a_1}(\bar{\lambda}_1), \dots, d_{a_k}(\bar{\lambda}_k) \} =$$

$$= \left[(2\pi)^{kn} \sum_{\bar{t}_1} h_{a_1}^2 \left(\frac{\bar{t}_1}{K_{T_1}} \right) \dots \sum_{\bar{t}_k} h_{a_k}^2 \left(\frac{\bar{t}_k}{K_{T_k}} \right) \right]^{-1/2} \times$$

$$\times \int \dots \int_{\prod^{(k-1)n}} f_{a_1} \dots a_k (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{k-1}) \prod_{j=1}^{k-1} \varphi_{a_j} (\bar{x}_j - \bar{\lambda}_j) \times$$

$$\times \varphi_{a_k} \left(\sum_{j=1}^{k-1} \bar{x}_j + \bar{\lambda}_k \right) d\bar{x}_1 \dots d\bar{x}_{k-1} = \int \dots \int_{\prod^{(k-1)n}} f_{a_1} \dots a_k (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{k-1}) \times$$

$$\times \Phi_{a_1} \dots a_k \left(\bar{x}_1 - \bar{\lambda}_1, \dots, \bar{x}_{k-1} - \bar{\lambda}_{k-1}, \sum_{j=1}^{k-1} \bar{x}_j + \bar{\lambda}_k \right) d\bar{x}_1 \dots d\bar{x}_{k-1}.$$

Теорема доказана.

Следствие 1. Для модифицированного конечного преобразования Фурье, заданного соотношением (7), выполняется:

$$\text{cov} \{ d_{a_1} (\bar{\lambda}_1), d_{a_2} (\bar{\lambda}_2) \} = \int_{\prod^n} f_{a_1 a_2} (\bar{x}) \Phi_{a_1 a_2} (\bar{x} - \bar{\lambda}_1, \bar{x} - \bar{\lambda}_2) d\bar{x},$$

$$\Phi_{a_1 a_2} (\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2) = \left[(2\pi)^{2n} \sum_{\bar{t}_1} h_{a_1}^2 \left(\frac{\bar{t}_1}{K_{T_1}} \right) \sum_{\bar{t}_2} h_{a_2}^2 \left(\frac{\bar{t}_2}{K_{T_2}} \right) \right]^{-1/2} \times$$

$$\times \varphi_{a_1} (\bar{\lambda}_1) \overline{\varphi_{a_2} (\bar{\lambda}_2)},$$

где

$$\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2 \in \prod^n, t_{1i} = \overline{0, K_{T_1} - 1}, t_{2i} = \overline{0, K_{T_2} - 1}, i = \overline{1, n},$$

функции $\varphi_{a_1} (\cdot)$, $\varphi_{a_2} (\cdot)$ задаются соотношением (8), $a_1, a_2 = \overline{1, q}$.

Следствие 2. Для модифицированного конечного преобразования Фурье $d_a(\bar{\lambda})$ выполняется:

$$Dd_a (\bar{\lambda}) = \int_{\prod^n} f_{aa} (\bar{x}) \Phi_a (\bar{x} - \bar{\lambda}) d\bar{x}, \text{ где } \bar{\lambda} \in \prod^n,$$

$$\Phi_a (\bar{\lambda}) = \left[(2\pi)^n \sum_{\bar{t}} h_a^2 \left(\frac{\bar{t}}{K_T} \right) \right]^{-1} |\varphi_a (\bar{\lambda})|^2.$$

$$t_i = \overline{0, K_T - 1}, i = \overline{1, n}, \varphi_a (\bar{\lambda})$$

определяется соотношением (8).

Список литературы

1. Бриллинджер Д. Временные ряды: Обработка данных и теория. М., 1980.
2. Гельфанд И. М., Шилов Г. К. Обобщенные функции и действия над ними. М., 1959.
3. Журбенко И. Г., Труш Н. Н. // Лит. мат. сб. 1979. Т. 19. № 1. С. 65.
4. Леонов В. П., Ширяев А. Н. // Теория вероятностей и ее применения. 1959. Т. 4. № 3. С. 342.

Поступила в редакцию 13.01.92.