УДК 519.1

Г. В. МАТВЕЕВ, Г. Л. ПЕТРОВА

СТРОЕНИЕ АНТИЦЕПЕЙ В НЕКОТОРЫХ ПОЛИЭДРАЛЬНЫХ МНОЖЕСТВАХ

Несколько классических задач дискретной математики связаны с распределением точек целочисленной решетки в выпуклом полиэдре [1]. То обстоятельство, что это пересечение наделено структурой частично упорядоченного множества, оказывается весьма полезным [2]. Одним из вопросов, возникающих при изучении любого класса частично упорядоченных множеств, является вопрос о его цепном и антицепном строении. В этой заметке завершается решение одной задачи, начатое в работе [3]. Полученный результат имеет естественную теоретико-числовую и геометрическую интерпретации.

Пусть $A = (a_{ij})$ – целочисленная невырожденная матрица с неотрицательными элементами, $a_1, a_2, \dots, a_n$ – ее столбцы,

$$P = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i \mid \alpha_i \in R,\ 0 \le \alpha_i < 1,\ i = \overline{1, n} \right\}$$

– соответствующий n-мерный параллелепипед. Рассмотрим его пересечение с целочисленной решеткой $P \cap Z^n = P_z$. Мы хотим продолжить изучение вопроса о неприводимости множества P_z, т. е. когда никакой его элемент не равен сумме других его элементов. Последнее условие эквивалентно тому, что множество P_z является антицепью в частичном порядке, заданном конусом, порожденным векторами $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Ранее рассматривался случай $\det A = p$ – простое [3]. Было показано, что в этом случае достаточным условием неприводимости является любое из следующих условий: $a + b = p$; $a = 1$; $b = 1$, где a, b – какие-либо элементы последнего столбца канонической матрицы

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & a \\ 0 & 1 & \dots & b \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & p \end{bmatrix},$$

полученной из матрицы A домножением слева на некоторую унимодулярную матрицу.

Естественным образом возникает вопрос о необходимости этих условий. Ответ на этот вопрос положителен при $n = 2$, отрицателен при $n \ge 4$ и был открыт при $n = 3$. Следующая теорема дает утвердительный ответ в случае $n = 3$.

Теорема. Множество P_z при $n = 3$ является антицепью тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий: 1) $a + b = p$; 2) $a = 1$; 3) $b = 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуясь явным описанием множества P_z [3], легко получить следующую переформулировку доказываемого.

Пусть $S_p = (\overline{ij})$ – таблица умножения мультипликативной группы конечного простого поля F_p, т. е. $1 \le i, j \le p - 1$, а черта означает взятие вычета по модулю p.

Отметим попутно, что $S_p^T = S_p$ и $s_{ij} + s_{ip-j} = p$. Тогда достаточно показать, что подматрица $S_p(a, b)$ матрицы S_p, составленная из двух ее столбцов с номерами a и b, обладает следующими свойствами. При $a + b \ne p$ и $a \ne 1$, $b \ne p - 1$, $a < b$, для любых двух строк с номерами i, j, $i < j$, матрицы $S_p(a, b)$ не выполняется неравенство $(\overline{ia}, \overline{ib}) < (\overline{ja}, \overline{jb})$. Это утверждение при $p > 11$ вытекает из следующего более сильного утверждения.

Рассмотрим подматрицу S_p^0 матрицы $S_p (p \ge 11)$, составленную из элементов первых $p' = \frac{p-1}{2}$ строк и столбцов с номерами $2, \dots, p'$.

Заменим теперь элементы этой матрицы знаками $\pm$ в зависимости от того, больше или меньше этот элемент $\frac{p}{2}$. Полученную матрицу обозначим через $S^0_p(\pm)$. Например,

$$S_{11}^{0}(+) = \begin{bmatrix} - & - & - & - \\ - & + & + & + \\ + & + & - & - \\ + & - & - & + \\ + & - & + & - \end{bmatrix}.$$

Тогда достаточно доказать, что у любой подматрицы, составленной из двух столбцов матрицы $S^0{}_p(\pm)$, найдутся строки вида $(+\ +)$, $(+\ -)$, $(-\ +)$, $(-\ -)$.

В свою очередь, пользуясь элементарными теоретико-числовыми соображениями, это утверждение можно переформулировать следующим образом.

Рассмотрим интервал $(0, \frac{p}{2})$ и два натуральных числа $a, b \in (0, \frac{p}{2})$, $1 < a < b$. Разделим этот интервал на a, а затем на b частей. Скажем, что сигнатура числа k равна $(-,-)$, если оно лежит на нечетных, считая от начала, интервалах деления. Это условие равносильно тому, что $\overline{ka}$, $\overline{kb} < \frac{p}{2}$. Аналогично определяются сигнатуры $(-,+)$, $(+,-)$, $(+,+)$. С учетом всего сказанного ранее, остается доказать, что при $p > 11$ для любых двух натуральных $a, b \in (0, \frac{p}{2})$, $1 < a < b$ найдутся четыре натуральных значения $k \in (0, \frac{p}{2})$ с попарно различными сигнатурами.

Рассмотрим сначала случай $b = a + 1$. Поскольку $a < \frac{p}{2}$ и $b < \frac{p}{2}$, то сигнатура числа $k = 1$ равна $(-,-)$, а так как числа отрезков деления отличаются на единицу, то сигнатура числа $k = \frac{p-1}{2}$ равна либо $(-,+)$, либо $(+,-)$. Теперь рассмотрим пересечение вторых от начала интервалов деления. Это пересечение – интервал $(\frac{p}{2a}, \frac{p}{b})$. Его длина равна $\Delta = p\frac{2a-b}{2ab}$. Докажем, что он содержит целую точку. Последнее означает, что реализуется возможность, противоположная исходной, т. е. возможность $(+,\ +,)$. Заметим, что замкнутая δ-окрестность рациональной точки $\frac{m}{n}$ при $\delta = \frac{n-1}{n}$ содержит два целых числа. Пусть теперь

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{b} = \frac{p}{a+1}.$$

Достаточно показать, что

$$\Delta = \frac{p}{a+1} - \frac{p}{2a} \geq \delta = \frac{a}{a+1},$$

что эквивалентно неравенству $p > \frac{2a^2}{a-1}$. Воспользуясь тем, что $b \leq \frac{p-1}{2}$, имеем $a \leq \frac{p-1}{2} - 1$, т. е. $p \geq 2a + 3$. Таким образом, достаточно показать, $2a + 3 \geq \frac{2a^2}{a-1}$, что справедливо при $a > 3$. Осталось рассмотреть два случая: $a = 2$, $a = 3$. Если $a = 2$ или $a = 3$, то $\Delta = \frac{p}{12}$. Так как для $p \leq 11$ утверждение проверяется непосредственно, то можно считать, что $\Delta > 1$.

Далее рассмотрим пересечение вторых от конца интервалов деления. В этом случае также

$$\Delta = p\frac{2ab-b}{2ab} = \frac{p}{2}\ \frac{a-1}{a(a+1)}.$$

Достаточно показать, что $\Delta \geq \frac{2a-1}{2a}$, что, как нетрудно убедиться, заведомо верно при $b = p' = \frac{p-1}{2}$. Случай $b = p'$ рассмотрим отдельно. Тогда

$a = p' - 1$. В последнем столбце матрицы $S_p^0(\pm)$ знаки чередуются, а в предпоследнем рядом стоят два одинаковых знака лишь один раз. Если эта пара знаков расположена не в начале и не в конце, то элементарным перебором убеждаемся в наличии всех четырех возможностей. Покажем теперь, что два одинаковых знака в предпоследнем столбце не могут стоять рядом в начале и в конце столбца. Если бы они стояли в начале, то должно было бы выполняться условие $\frac{p}{2}\frac{1}{p'-1} > 2$, что эквивалентно $p < 6$. Если же одинаковые знаки стояли бы в конце, то

$$\frac{p}{2} - \frac{p}{2}\frac{1}{p'-1} < \frac{p-1}{2} - 1,$$

что эквивалентно $p < 9$.

Далее рассмотрим случай $b > a + 1$. Вернемся к матрице $S_p^0(\pm)$. Опишем расположение знаков в ее столбцах. Возьмем произвольный столбец с номером a и разделим интервал $(0, \frac{p}{2})$ на a частей. Заметим, что все точки деления, в силу простоты p, будут нецелыми. Тогда на k-м месте в a-м столбце будет стоять $+$ или $-$, в зависимости от того, какому интервалу, нечетному или четному, считая от начала, принадлежит k. Поэтому число подряд идущих плюсов или минусов равно $[\frac{p}{2a}]$ или $[\frac{p}{2a}] + 1$, так как число целых точек на интервале длины α равно $[\alpha]$ или $[\alpha] + 1$. Положим $[\frac{p}{2a}] = a'$. Поскольку $b \geq a + 2$, то число участков знакопостоянства в a-м столбце, по крайней мере, на 2 больше, чем в b-м столбце. Будем также говорить, что точек перемен знака в b-м столбце, по крайней мере, на две больше. Если две из этих дополнительных точек расположены напротив соседних участков знакопостоянства a-го столбца, то такой случай назовем каноническим. В каноническом случае, очевидно, встречаются все четыре возможности $(\pm, \pm)$. Заметим, что если $b' < a' - 2$, то напротив каждого участка знакопостоянства в a-м столбце есть точка перемены знака b-го столбца, и, следовательно, этот случай канонический. Поэтому рассмотрим случай $b' = a' - 1$, $b' = a'$. Напомним, что в a-м столбце, априори, участки знакопостоянства могут быть длины a' и $a' + 1$ либо только a', либо только $a' + 1$. Аналогично устроены участки знакопостоянства в b-м столбце. А в совокупности в обоих этих столбцах, с учетом того, что $b \geq a + 2$ $a' - 1 \leq b \leq a'$, возможны лишь следующие случаи:

$$1)\ \left(\frac{a',\, a'+1}{a',\, a'+1}\right),\ 2)\ \left(\frac{a',\, a'+1}{a'}\right),\ 3)\ \left(\frac{a'+1}{a'}\right),\ 4)\ \left(\frac{a'+1}{a',\, a'+1}\right),$$

$$5)\ \left(\frac{a',\, a'+1}{a'-1,\, a'}\right),\ 6)\left(\frac{a',\, a'+1}{a'-1}\right),\ 7)\ \left(\frac{a'+1}{a'-1,\, a'}\right),\ 8)\ \left(\frac{a'+1}{a'-1}\right),$$

где в числителе указаны возможные длины участков знакопостоянства в a-м столбце, а в знаменателе – в b-м столбце.

Случаи 3, 6, 7, 8 допускают единообразное рассмотрение. Рассмотрим первый из них. Если имеет место ситуация $\left(\frac{a'+1}{a'}\right)$, то на каждом участке знакопостоянства длины $a' + 1$ есть точка перемены знака участков знакопостоянства длины a', т. е. это – канонический случай.

Перейдем к случаю $\left(\frac{a',\, a'+1}{a',\, a'+1}\right)$. Очевидно, что участков знакопостоянства длины $a' + 1$ в a-м столбце должно быть больше, чем участков длины $a' + 1$ в b-м столбце. Значит, на одном из этих участков есть точка перемены знака, соответствующая двум участкам длины a'. Следовательно, либо это канонический случай, либо $2a' = a' + 1$. Поэтому $a' = 1$, т. е. 1, 2, 4, 5 сводятся к случаям $\left(\frac{1,2}{1,2}\right)$, $\left(\frac{1,2}{1}\right)$, $\left(\frac{2}{1,2}\right)$, $\left(\frac{2,3}{1,2}\right)$. Рассмотрим подробнее, как наиболее сложный, последний из них. С учетом того, что первый участок знакопостоянства всегда самый короткий, находим, что знаки в этих столбцах в начале могут быть расположены лишь следующим образом: $\begin{pmatrix} - & - & + & + & - & - \\ - & + & - & - & + & + \end{pmatrix}^T$, либо $\begin{pmatrix} - & - & + & + & - & - & - \\ - & + & - & - & + & - & + \end{pmatrix}^T$. Положим, $\frac{p}{2b} = 1 + \epsilon$. Тогда из первой возможности вытекает, что с одной стороны $2 < 2 + 2\epsilon < 3$, а с другой – $6 < 4 + 4\epsilon < 7$. Из первого неравенства находим, что $\epsilon < \frac{1}{2}$, а из второго, что $\epsilon > \frac{1}{2}$. Противоречие. Аналогично рассматривается вторая возможность. Здесь, с одной стороны, $4 < 3 + 3\epsilon < 5$, а с другой, $7 < 6 + 6\epsilon < 8$. В частности, первое неравенство дает $\epsilon > \frac{1}{3}$, а второе – $\epsilon < \frac{1}{3}$.

Доказанный результат имеет несколько арифметических и геометрических следствий, представляющих и самостоятельный интерес.

Следствие 1. При простом $p \geq 11$ и при любых натуральных $1 < a, b < \frac{p}{2}$ можно подобрать четыре натуральных значения $x, 1 < x < \frac{p}{2}$, таких, что числа $[\frac{2ax}{p}]$, $[\frac{2bx}{p}]$ будут иметь любую наперед заданную четность.

Следствие 2. Множество P_z при $\det A = p$, где p – простое, а $n = 3$, является неприводимым тогда и только тогда, когда все его точки образуют плоскую антицепь.

Авторы благодарят В. М. Ширяева за полезное обсуждение работы.

Список литературы

1. Емеличев В. А., Ковалев М. М., Кравцов М. К. Многогранники, графы, оптимизация. М., 1981.
2. Стенли Р. Перечислительная комбинаторика. М., 1990.
3. Петрова Г. Л. // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. 1985. № 4. С. 24.

Поступила в редакцию 28.12.91.

УДК 517.977

Н. В. БАЛАШЕВИЧ

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ СО МНОГИМИ ВХОДАМИ

1. В классе кусочно-непрерывных r-вектор-функций $u(t)$, $t \in T = [0, t^*]$, рассмотрим задачу оптимального управления:

$$c'x(t^*) \to \max,$$

$$\dot{x} = Ax + Bu, \ x(0) = x_0,$$

$$Hx(t^*) = g, \tag{1}$$

$$d_* \leq u(t) \leq d^*, \ t \in T,$$

$$(A \in R^{n \times n}, \ B = (b_1, \dots, b_r) \in R^{n \times r}, \ c, \ x \in R^n, \ u, d_*, d^* \in R^r,$$

$$g \in R^m, \ H \in R^{m \times n}, \ \operatorname{rank} H = m \leq n).$$

Будем считать, что из-за возмущений, действующих в реальных условиях, поведение системы описывается уравнением

$$\dot{x} = Ax + Bu + w(t), \ x(0) = x_0, \tag{2}$$

где $w(t)$, $t \in T^0 = [0, t^0]$, $0 < t^0 < t^*$, $w(t) \equiv 0$, $t \in [t^0, t^*]$, – неизвестная заранее непрерывная n-вектор-функция.

Использование программных решений задачи (1) в этих условиях невозможно. Для построения оптимальных управлений типа обратной связи погрузим задачу (1) в семейство задач:

$$c'x(t^*) \to \max, \tag{3}$$