Шаг 12. В остальных неравенствах поменять знак на противоположны

Шаг 13. $B_R := 100\ldots0$, $L := -1$ и перейти к шагу 6.

Шаг 14. Конец процедуры.

Рассмотренный подход был реализован в комплексе программ для авт(матизации проектирования фильтров на ПАВ. Численные эксперимент показали его высокую эффективность.

Выражаю благодарность заведующему кафедрой МО САПР Михаил Михайловичу Ковалеву за предоставление темы исследования и консульта тивную помощь при его проведении.

Список литературы

1. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. М. 1978. С. 157.

2. Олинер А. Поверхностные акустические волны. М., 1981. С. 81.

Поступила в редакцию 06.12.91.

УДК 517.948.32:517.544

Т. А. ШЕВИЛА

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА КАРЛЕМАНА В ПРОСТРАНСТВЕ E

1. Пусть D – конечная односвязная область, ограниченная контуром Ляпунова Г. Предполагаем, что начало координат принадлежит области D. На контуре Г заданы непрерывные функции $G(t)\neq0$ и $g(t)$. Задан гомеоморфизм $\alpha(t)$, переводящий контур Г на себя с изменением ориентации и удовлетворяющий условиям: 1) $\alpha[\alpha(t)]\equiv t$, 2) $\alpha'(t)$ удовлетворяет условию Гельдера. На контуре Г пусть выполнены тождества:

$$G[\alpha(t)]G(t)\equiv1, \tag{1}$$

$$G(t)g[\alpha(t)]+g(t)\equiv0. \tag{2}$$

Решим следующую краевую задачу.

Найти все функции $\Phi(z)$, аналитические в D, имеющие почти всюду на Г угловые предельные значения, удовлетворяющие равенству:

$$\Phi[\alpha(t)]=G(t)\Phi(t)+g(t), \quad t\in\Gamma. \tag{3}$$

В окрестности точки $t_0\in\Gamma$, где не существует конечных угловых предельных значений, искомая функция предполагается почти ограниченной, т. е. такой, что для любого $\epsilon>0$ выполняется равенство:

$$\lim_{z\to t_0}(z-t_0)^{\epsilon}\Phi(z)=0. \tag{4}$$

Пространство функций, обладающих свойствами искомой функции задачи (3), обозначим через E(D).

Для решения используем метод конформного склеивания. Склеивание осуществим с помощью функции $\xi=\omega(z)$, свойства которой изучены в [1. С. 152].

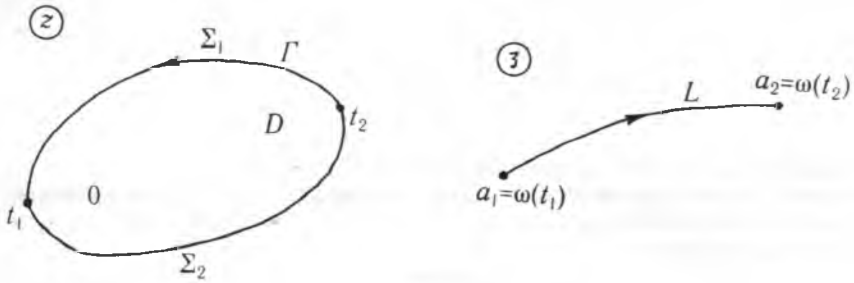
Будем считать, что на контуре Г задана стандартная ориентация. Неподвижные точки t_1 и t_2 функции $\alpha(t)$ делят контур Г на две дуги Σ_1 и Σ_2. Условимся, учитывая порядок обхода контура, что $\Sigma_1=[t_2,\ t_1]$, а $\Sigma_2=[t_1,\ t_2]$. Функция $\omega(z)$ отобразит область D на плоскость с разрезом L, который имеет своими концами образы неподвижных точек (рисунок). Полагая $t\in\Sigma_1$, получим $\alpha(t)\in\Sigma_2$. Будем считать, что ориентация контура L индуцируется гомеоморфизмом $\omega:\Sigma_2\to L$, т. е. ведет от $a_1=\omega(t_1)$ к $a_2=\omega(t_2)$. После склеивания точек t и $\alpha(t)$ в краевом условии (3) исчезает гомеоморфизм $\alpha(t)$, и задача Карлемана сводится к равносильной ей задаче Римана на разомкнутом контуре L:

$$F^+(\xi)=H(\xi)F^-(\xi)+h(\xi), \quad \xi\in L \tag{5}$$

где обозначено

$$F(\xi)=\Phi[\rho(\xi)], \quad H(\xi)=G[\rho^-(\xi)], \quad h(\xi)=g[\rho^-(\xi)],$$

$z=\rho(\xi)$ – функция обратная к $\xi=\omega(z)$.



Отображение области D на плоскость с разрезом L

Можно показать, что если $\Phi(z)$ принадлежит пространству $E(D)$, то $F(\xi)$ принадлежит пространству $E[\omega(D)]$ и, наоборот, если $F(\xi)$ принадлежит пространству $E[\omega(D)]$, то $\Phi(z)$ из пространства $E(D)$. Задачи (3) и (5) эквивалентны.

Вычислим индекс коэффициента задачи (5). Обозначим

$$\kappa = \frac{1}{2\pi}\arg G(t)|_{\Gamma}.$$

Тогда из условия (1) следует, что

$$\arg H(\xi)|_{L} = -\arg G(t)|_{\Sigma_1} = -\kappa\pi .$$

Из того же равенства (1) видно, что $H(\xi)$ может принимать в точках a_k, $k = 1, 2$, лишь значения ± 1. Выделим на контуре L однозначную ветвь $\ln H(\xi)$. Для этого определим ветвь $\arg H(\xi)$ в начальной точке контура, полагая

$$\frac{1}{2\pi}\arg H(a_1) = 0, \quad \text{если } H(a_1) = 1,$$

$$\frac{1}{2\pi}\arg H(a_1) = -\frac{1}{2}, \quad \text{если } H(a_1) = -1.$$

Тогда индекс $\frac{1}{2\pi}\arg H(\xi)|_{L}$ будет равен

$$-\frac{\kappa}{2}, \text{ если } H(a_1) = H(a_2) = 1,$$

$$-\frac{\kappa+1}{2}, \text{ если } H(a_1) = -H(a_2) = 1,$$

$$-\frac{\kappa+2}{2}, \text{ если } H(a_1) = H(a_2) = -1.$$

Для общего случая можно записать:

$$\frac{1}{2\pi}\arg H(\xi)|_{L} = -\frac{\kappa + m_{-}}{2},$$

где через m_{-} обозначено число неподвижных точек t_k, в которых $G(t_k) = -1$.

3. Решим сначала однородную задачу Римана:

$$F_0^{+}(\xi) = H(\xi)F_0^{-}(\xi), \ \xi \in L. \qquad (6)$$

Следуя [2], решение ищем в виде:

$$F_0(\xi) = \varphi(\xi)\exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\ln H(\tau)\,d\tau}{\tau - \xi}\right\}, \qquad (7)$$

где $\varphi(\xi)$ – рациональная функция, которая подбирается так, чтобы $F_0(\xi)$ стала почти ограниченной. Обозначим

$$\Gamma(\xi) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\ln H(\tau)\,d\tau}{\tau - \xi}\right\}.$$

Используя [1. С. 67], опишем поведение функции $\Gamma(\xi)$ в точках a_k формулой

$$\Gamma(\xi)=\begin{cases}(\xi-a_1)^{-\frac{1}{2\pi}\arg H(a_1)}, & \xi\to a_1\\ (\xi-a_2)^{-\frac{1}{2\pi}\arg H(a_2)}, & \xi\to a_2\end{cases}$$

с точностью до почти ограниченного множителя.
Учитывая выбор однозначной ветви логарифма $\ln H(\xi)$, заключаем, что $\Gamma(\xi)$ в точке a_1 особенностей не имеет. Если $\kappa+m_-\leq 0$, то точка a_2 является нулем порядка

$$\left|\frac{\kappa+m_-}{2}\right|$$

функции $\Gamma(\xi)$. Из этих рассуждений следует, что $\varphi(\xi)$ имеет вид:

$$\varphi(\xi)=\frac{P_{-\frac{\kappa+m_-}{2}}(\xi)}{(\xi-a_2)^{-\frac{\kappa+m_-}{2}}},\quad \text{если } \kappa+m_-\leq 0.$$

$$\varphi(\xi)\equiv 0,\quad \text{если } \kappa+m_->0,$$

$P_{-\frac{\kappa+m_-}{2}}$ – многочлен степени $\left(-\frac{\kappa+m_-}{2}\right)$ с произвольными коэффициентами. Таким образом, решение задачи (6) имеет вид:

$$F_0(\xi)=\frac{P_{-\frac{\kappa+m_-}{2}}(\xi)}{(\xi-a_2)^{-\frac{\kappa+m_-}{2}}}\exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\ln H(\tau)}{\tau-\xi}d\tau\right\}. \tag{8}$$

Число решений однородной задачи (6)

$$l=1-\frac{\kappa+m_-}{2}.$$

Найдем теперь частное решение неоднородной задачи (5). Как известно из [2], для разрешимости краевой задачи (5) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства:

$$\int_L h(\xi)\,d\Psi^+(\xi)=0, \tag{9}$$

где $d\Psi^+(\xi)^L$ – предельное значение слева на L общего решения однородной союзной задачи для дифференциалов, которая формулируется следующим образом.

Найти все дифференциалы $d\Psi(\xi)$, аналитические в $\omega(D)$, имеющие почти всюду на L конечные угловые предельные значения, удовлетворяющие равенству:

$$d\Psi^-(\xi)=H(\xi)\,d\Psi^+(\xi),\quad \xi\in L. \tag{10}$$

Совершенно очевидно, что краевая задача (10) эквивалентна следующей краевой задаче для функций:

$$\psi^-(\xi)=H(\xi)\psi^+(\xi),\quad \xi\in L, \tag{11}$$

где обозначено $\psi(\xi)=\Psi'(\xi)$.
На концах контура L решение задачи (11) допускает бесконечность интегрируемого порядка и $\psi(\xi)=0(1/\xi^2)$, $\xi\to\infty$.

Рассуждая так же, как в пункте 3, получим решение задачи (11) в следующем виде: если $\kappa+m_->0$, то

$$\psi(\xi)=\frac{Q_{\frac{\kappa+m_-}{2}-1}(\xi)}{(\xi-a_2)^{\frac{\kappa+m_-}{2}-1}}\exp\left\{-\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\ln H(\tau)\,d\tau}{\tau-\xi}\right\}, \tag{12}$$

если $\kappa+m_-\leq 0$, то задача (11) имеет лишь тривиальное решение.

Выполнение условия (9) в случае, когда $\kappa+m_-\leq 0$, очевидно.

Рассмотрим случай, когда $\kappa + m_- > 0$. Возвращаясь на D, можно равенству (10) придать вид:

$$d\tilde{\Psi}(t) = G(t)\, d\tilde{\Psi}[\alpha(t)], \quad t \in \Gamma, \tag{13}$$

где

$$d\tilde{\Psi}(t) = d\tilde{\Psi}[\rho(\xi)] = d\Psi(\zeta).$$

Равенство (13) перепишем в виде:

$$\tilde{\psi}(t) = G(t)\alpha'(t)\tilde{\psi}[\alpha(t)], \tag{14}$$

где обозначено $\tilde{\psi}(t) = \tilde{\Psi}'(t)$. Тогда в терминах исходной области D критерий разрешимости задачи имеет вид:

$$\int_{\Sigma_2} g[\alpha(t)]\tilde{\psi}_j(t)\, dt = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, l', \tag{15}$$

где $\tilde{\psi}_j(t)$ – полная система решений однородной союзной задачи (14).

Предположим, что выполнены условия разрешимости (9). Найдем частное решение неоднородной задачи (5). В качестве канонической рассмотрим функцию

$$X(\xi) = (\xi - a_2)^{\frac{\kappa + m_-}{2}}\, \Gamma(\xi). \tag{16}$$

Тогда, следуя [1], частное решение задачи (5) имеет вид:

$$F_1(\xi) = \frac{X(\xi)}{2\pi i} \int_L \frac{h(\tau)\, d\tau}{X^+(\tau)(\tau - \xi)}.$$

Учитывая, что при $\kappa + m_- \le 0$ условия разрешимости (15) выполняются всегда, а при $\kappa + m_- > 0$ для выполнения (15) должны выполняться l условий, можно сформулировать следующий вывод.

Т е о р е м а. 1. Индекс краевой задачи (3) равен

$$l - l' = 1 - \frac{\kappa + m_-}{2}.$$

2. Число линейно-независимых решений однородной задачи определяется формулой

$$l = \max\left\{0,\ 1 - \frac{\kappa + m_-}{2}\right\}.$$

3. Общее решение задачи имеет вид:

$$\Phi(z) = \frac{P_{-\frac{\kappa+m_-}{2}}[\omega(z)]}{(\omega(z) - t_2)^{-\frac{\kappa+m_-}{2}}} \exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\Sigma_2} \frac{\ln G[\omega(\tau)]\omega'(\tau)\, d\tau}{\omega(\tau) - \omega(z)}\right\} +$$

$$+ \frac{\chi[\omega(z)]}{2\pi i} \int_{\Sigma_2} \frac{g[\omega(\tau)]\omega'(\tau)\, d\tau}{\chi^+[\omega(z)](\omega(\tau) - \omega(z))}.$$

4. Критерием разрешимости неоднородной задачи (3) являются следующие равенства:

$$\int_{\Sigma_2} g[\alpha(t)]\tilde{\psi}_j(t)\, dt = 0,$$

где $\tilde{\psi}_j(t)$ – полная система решений однородной союзной задачи (14).

Список литературы

1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., 1977.
2. Зверович Э. И.//УМН. 1971. Т. 26. № 1 (157).

Поступила в редакцию 04.12.91.