$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (1 - \sin t + \cos t + 8\cos^2 t)\, x_1 + (3 - \sin t + 9\cos t + 8\cos^2 t)\, x_2, \\ \dot{x}_2 = (-2 + \sin t + 7\cos t - 8\cos^2 t)\, x_1 + (4 + \sin t - \cos t - 8\cos^2 t)\, x_2. \end{cases}$$

Здесь

$$P_r(t) = \begin{bmatrix} 1 + \cos t + 8\cos^2 t & 3 + 9\cos t + 8\cos^2 t \\ -2 + 7\cos t - 8\cos^2 t & 4 - \cos t - 8\cos^2 t \end{bmatrix},$$

$$P_н(t) = \begin{bmatrix} -\sin t & -\sin t \\ \sin t & \sin t \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Поскольку выполнено условие (14), то отображение за период для рассматриваемой системы совпадает с отображением для системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 3x_2, \\ \dot{x}_2 = -2x_1 + 4x_2. \end{cases}$$

Заметим также, что если для системы $\dot{x} = [A + S(t)]x$ с постоянной матрицей A и нечетной $S(t)$ выполняется тождество $AS(t) = S(t)A$, то отображение Пуанкаре этой системы такое же, как и у стационарной системы $\dot{y} = Ay$. Действительно, в этом случае тождество (14) принимает вид $P_r'(t) = 0$, поскольку $P_r P_н = P_н P_r = SA$ и работает следствие.

Список литературы

1. Мироненко В. И. Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений. Мн., 1986.

Поступила в редакцию 17.12.91.

УДК 519.1

А. А. ЗАПОРОЖЕЦ

ПРИМЕНЕНИЕ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ ФИЛЬТРОВ НА ПОВЕРХНОСТНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛНАХ

При оптимальном проектировании секционированных встречно-штыревых преобразователей фильтра на поверхностных акустических волнах (ПАВ) возникает задача построения на промежутке $[0, 2\pi]$ тригонометрического многочлена $P_N(x, a)$ с минимально возможным числом слагаемых N, удовлетворяющего условиям:

$$\beta_k |P_N(x^*, a)| \le |P_N(x, a)| \le \alpha_k |P_N(x^*, a)|, \quad x \in [u_k, v_k), \quad k = \overline{1, m},$$

где x^* – несущая точка, $[u_k, v_k)$ – непересекающиеся интервалы, покрывающие $[0, 2\pi)$ [1]. В силу технологических ограничений полином $P_N(x, a)$ ищется в форме:

$$\sum_{i=1}^{N} a_i (\sin(ix) + \cos(ix)), \text{ где } a_i \in B_3 = \{-1, 0, 1\},$$

при этом за каждым ненулевым коэффициентом a_i следующий ненулевой коэффициент должен иметь противоположный знак [2]. Множество векторов $a \in B_3^N$, удовлетворяющих изложенным требованиям, обозначим через D.

Задачу рассматривают также в следующей дискретной постановке. Пусть $C = C(M, N)$ – матрица с элементами $c_{ji} = \sin(ix_j) + \cos(ix_j)$, $d = d(N)$ – вектор с координатами

$$d_i = \sin(ix^*) + \cos(ix^*), \quad i = \overline{1, N},$$

где x_j – точки интервала $[0, 2\pi)$, $j = \overline{1, M}$. Очевидно, что

$$P_N(x_j, a) = (c^j, a), \text{ а } P_N(x^*, a) = (d, a),$$

где c^j – j-я строка матрицы c. Необходимо найти при минимальном значении N вектор $a \in D$, удовлетворяющий следующей системе неравенств:

$$\beta_k |(d, a)| \le |(c^j, a)| \le \alpha_k |(d, a)|, \ j \in I_k, \ k = \overline{1, m}, \tag{1}$$

где $I_k = \{j : x_j \in [u_k, v_k)\}$.

Обозначим через D_{-1} множество таких векторов из D, у которых первая ненулевая компонента равна -1, а через D_1 множество всех остальных векторов из D. Подход к решению поставленной задачи базируется на теореме 1.

Теорема 1. Для того чтобы точка a являлась вершиной многогранника P, заданного системой линейных неравенств:

$$\begin{aligned} -1 \le a_1 & \le 0 \\ -1 \le a_1 + a_2 & \le 0 \\ \ldots\ldots\ldots & \\ -1 \le a_1 + a_2 + \ldots + a_N & \le 0, \end{aligned} \tag{2}$$

необходимо и достаточно, чтобы $a \in D_{-1}$.

Доказательство. Существует 2^N способов выбора N гиперплоскостей с линейно-независимыми образующими векторами из $2 \times N$ гиперплоскостей, задающих грани многограннника P. Следовательно, многогранник P имеет 2^N вершин. Очевидно, что любая точка a из D_{-1} принадлежит N гиперплоскостям, задающим линейно-независимые грани P. Следовательно, любая точка a из D_{-1} есть вершина P. Так как $|D_{-1}| = 2^N$, то существует взаимно-однозначное соответствие между вершинами многогранника P и точками множества D_{-1}, что и требовалось доказать.

Следствие. Для того чтобы точка a являлась вершиной многогранника P, заданного следующей системой линейных неравенств:

$$\begin{aligned} 0 \le a_1 & \le 1 \\ 0 \le a_1 + a_2 & \le 1 \\ \ldots\ldots\ldots & \\ 0 \le a_1 + a_2 + \ldots + a_N & \le 1, \end{aligned} \tag{2'}$$

необходимо и достаточно, чтобы $a \in D_1$.

Доказательство непосредственным образом вытекает из теоремы 1.

Из теоремы 1 следует, что целочисленное решение системы

$$\begin{aligned} 0 \le a'_1 & \le 1 \\ 1 \le a'_1 + a'_2 & \le 2 \\ \ldots\ldots\ldots & \\ N - 1 \le a'_1 + a'_2 + \ldots + a'_N & \le N, \end{aligned} \tag{2}$$

$$\beta_k |(d, a - 1)| \le |(c^j, a' - 1)| \le \alpha_k |(d, a' - 1)|, \ j \in I_k, \ k = \overline{1, m}, \tag{3}$$

является решением исходной задачи, сдвинутым на вектор 1, т. е. $a' = a + 1$.

Для линеаризации ограничений (3) раскроем модули. Число различных вариантов раскрытия модулей в (3) приведено ниже. Для каждого варианта решим задачу ЦЛП с соответствующими ограничениями и целевой функцией $\sum_{i=1}^{N} (1000 - i) \times a'_i \to \max$. Если после перебора всех вариантов решение не найдено, то рассмотрим множество D_1 и, опираясь на следствие из теоремы 1, повторим в этом множестве процесс поиска решения. Если и в этом случае решение не найдено, то можно увеличить число N и полностью повторить поиск решения.

Пусть r – число интервалов $[u_k, v_k)$, для которых $\beta \ne 0$, а

$$R = \begin{cases} r, & \text{если } x^* \in [u_k, v_k), \text{ такому, что, } \beta_k \ne 0 \\ r + 1, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Покажем, что число вариантов раскрытия модулей в (3) равно 2^R. Так как функция $P_N(x, a-1)$, в силу своей непрерывности, не меняет знак в точках x_j из одного интервала $I_k = \{j : x_j \in [u_k, v_k),\ \beta_k \neq 0\}$, а в неравенствах, отвечающих точкам $x_j \in I_k = \{j : x_j \in [u_k, v_k),\ \beta_k = 0\}$, на раскрытие модулей влияет лишь знак $P_N(x^*, a-1)$, то при поиске решения в множестве $D_{-1}(D_1)$ в худшем случае потребуется решить 2^R задач ЦЛП.

Процедуру синтеза вариантов раскрытия модулей в (3) удобно организовать так, чтобы предыдущий вариант минимально отличался от последующего. С этой целью определим R-разрядное двоичное число B_R так, что его s-й разряд, соответствующий интервалу $[u_s, v_s)$ с $\beta_s \neq 0$, должен быть равен 0, если $P_N(x_j, a'-1) \geq 0$, $x_j \in [u_s, v_s)$, и 1 в противном случае, $s = \overline{1, R}$.

Будем считать, что $B_R[R]$ соответствует интервалу, содержащему точку x^*.

	$\beta_k = 0$		$\beta_k \neq 0$
	$P_N(x_j, a'-1) \geq 0$ ($B_R[s] = 0$)	$P_N(x_j, a'-1) \leq 0$ ($B_R[s] = 1$)	
$P_N(x^*, a'-1) \geq 0$	$(c^j - \beta_k d, a'-1) \geq 0$ $(c^j - \alpha_k d, a'-1) \leq 0$ (4)	$(c^j + \beta_k d, a'-1) \leq 0$ $(c^j + \alpha_k d, a'-1) \geq 0$ (5)	$(c^j + \alpha_k d, a'-1) \geq 0$ $(c^j - \alpha_k d, a'-1) \leq 0$ (6)
$P_N(x^*, a'-1) \leq 0$	$(c^j + \beta_k d, a'-1) \geq 0$ $(c^j + \alpha_k d, a'-1) \leq 0$ (7)	$(c^j - \beta_k d, a'-1) \leq 0$ $(c^j - \alpha_k d, a'-1) \geq 0$ (8)	$(c^j + \alpha_k d, a'-1) \leq 0$ $(c^j - \alpha_k d, a'-1) \geq 0$ (9)

Варианты раскрытия модуля в j-м неравенстве системы (3) представлены в таблице. Отметим, что коэффициенты и правые части неравенств систем (4) и (5) (и соответственно (7) и (8)) отличаются друг от друга константами, а знаки соответствующих неравенств в этих системах противоположны.

Процедура перебора вариантов раскрытия модулей в (3) состоит из следующих шагов.

Шаг 1. В неравенствах, отвечающих точкам из интервалов, которые соответствуют младшим R-1 разрядам двоичного числа B_R, раскрыть модуль, как в (4).

Шаг 2. Если $R = r$, то в неравенствах, отвечающих точкам из интервала, который соответствует $B_R[R]$, раскрыть модуль, как в (4). Иначе раскрыть модуль в этих неравенствах, как в (6).

Шаг 3. В остальных неравенствах раскрыть модуль, как в (6).

Шаг 4. Добавить к системе неравенство $P_N(x^*, a'-1) \geq 0$ и поставить ей в соответствие $B_R = 00\ldots0$.

Шаг 5. $L := 1$.

Шаг 6. $B'_R := B_R + 1$.

Шаг 7. Для s от 1 до R выполнять

Шаг 7.1. $\gamma_s := L^*(B'_R[s] - B_R[s])$.

Шаг 7.2. Произвести модификацию всех неравенств, отвечающих точкам интервалов, для которых $\gamma_s \neq 0$, добавив к i-му коэффициенту величину $2^*\gamma_s{}^*\beta_k{}^*d_i$, либо $2^*\gamma_s{}^*\alpha_k{}^*d_i$, а к правым частям $2^*\gamma_s{}^*\beta_k{}^*\sum_{i=1}^{N} d_i$, либо $2^*\gamma_s{}^*\alpha_k{}^*{}^*\sum_{i=1}^{N} d_i$ и поменяв знак на противоположный.

Шаг 7.3. Конец цикла по s.

Шаг 8. $B_R := B'_R$.

Шаг 9. Если $B_R = 11\ldots1$, то перейти к шагу 14.

Шаг 10. Если $B_R \neq 011\ldots1$, то перейти к шагу 6.

Шаг 11. Если $R = r$, то в неравенствах, отвечающих точкам из интервала, который соответствует $B_R[R]$, перейти от случая (4) к случаю (5), модифицировав их по вышеуказанной схеме. Иначе, поменять в этих неравенствах знак на противоположный.

Шаг 12. В остальных неравенствах поменять знак на противоположны

Шаг 13. $B_R := 100\ldots0$, $L := -1$ и перейти к шагу 6.

Шаг 14. Конец процедуры.

Рассмотренный подход был реализован в комплексе программ для авт‹ матизации проектирования фильтров на ПАВ. Численные эксперимент показали его высокую эффективность.

Выражаю благодарность заведующему кафедрой МО САПР Михаил Михайловичу Ковалеву за предоставление темы исследования и консульта тивную помощь при его проведении.

Список литературы

1. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. М. 1978. С. 157.

2. Олинер А. Поверхностные акустические волны. М., 1981. С. 81.

Поступила в редакцию 06.12.91.

УДК 517.948.32:517.544

Т. А. ШЕВИЛА

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА КАРЛЕМАНА В ПРОСТРАНСТВЕ Е

1. Пусть D – конечная односвязная область, ограниченная контуром Ляпунова Г. Предполагаем, что начало координат принадлежит области D. На контуре Г заданы непрерывные функции $G(t)\neq0$ и $g(t)$. Задан гомеоморфизм $\alpha(t)$, переводящий контур Г на себя с изменением ориентации и удовлетворяющий условиям: 1) $\alpha[\alpha(t)]\equiv t$, 2) $\alpha'(t)$ удовлетворяет условию Гельдера. На контуре Г пусть выполнены тождества:

$$G[\alpha(t)]G(t)\equiv1, \tag{1}$$

$$G(t)g[\alpha(t)]+g(t)\equiv0. \tag{2}$$

Решим следующую краевую задачу.

Найти все функции $\Phi(z)$, аналитические в D, имеющие почти всюду на Г угловые предельные значения, удовлетворяющие равенству:

$$\Phi[\alpha(t)]=G(t)\Phi(t)+g(t),\quad t\in\Gamma. \tag{3}$$

В окрестности точки $t_0\in\Gamma$, где не существует конечных угловых предельных значений, искомая функция предполагается почти ограниченной, т. е. такой, что для любого $\epsilon>0$ выполняется равенство:

$$\lim_{z\to t_0}(z-t_0)^{\epsilon}\Phi(z)=0. \tag{4}$$

Пространство функций, обладающих свойствами искомой функции задачи (3), обозначим через E(D).

Для решения используем метод конформного склеивания. Склеивание осуществим с помощью функции $\xi=\omega(z)$, свойства которой изучены в [1. С. 152].

Будем считать, что на контуре Г задана стандартная ориентация. Неподвижные точки t_1 и t_2 функции $\alpha(t)$ делят контур Г на две дуги Σ_1 и Σ_2. Условимся, учитывая порядок обхода контура, что $\Sigma_1=[t_2, t_1]$, а $\Sigma_2=[t_1, t_2]$. Функция $\omega(z)$ отобразит область D на плоскость с разрезом L, который имеет своими концами образы неподвижных точек (рисунок). Полагая $t\in\Sigma_1$, получим $\alpha(t)\in\Sigma_2$. Будем считать, что ориентация контура L индуцируется гомеоморфизмом $\omega:\Sigma_2\to L$, т. е. ведет от $a_1=\omega(t_1)$ к $a_2=\omega(t_2)$. После склеивания точек t и $\alpha(t)$ в краевом условии (3) исчезает гомеоморфизм $\alpha(t)$, и задача Карлемана сводится к равносильной ей задаче Римана на разомкнутом контуре L:

$$F^+(\xi)=H(\xi)F^-(\xi)+h(\xi),\quad \xi\in L \tag{5}$$

где обозначено

$$F(\xi)=\Phi[\rho(\xi)],\quad H(\xi)=G[\rho^-(\xi)],\quad h(\xi)=g[\rho^-(\xi)],$$

$z=\rho(\xi)$ – функция обратная к $\xi=\omega(z)$.