зависимости решений уравнения (1) от коэффициента можно, не нарушая справедливости (3) и (4), изменить $a(t)$ так, чтобы она стала непрерывной, конечно- или даже бесконечно гладкой (класса C^∞).

Авторы выражают благодарность Н. А. Изобову и С. А. Мазанику за постановку задачи и внимание к работе.

Список литературы

1. Мироненко В. И. Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений. Мн., 1986.

2. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М., 1966. С.17.

Поступила в редакцию 03.12.91.

УДК 517.925

Н. Ф. НАУМОВИЧ

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ, СОХРАНЯЮЩЕЕ ОТОБРАЖЕНИЕ ЗА ПЕРИОД

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = X(t,\ x),\ t \in \mathbf{R},\ x^T = (x_1,\ \ldots,\ x_n) \in \mathbf{R}^n, \tag{1}$$

в предположении, что функция $X(t, x)$ непрерывно дифференцируема в $\mathbf{R}^{n+1}$ и $X(t+2\omega,\ x) \equiv X(t,\ x)$. Введем обозначения

$$X_н(t,\ x) = 0{,}5\,(X(t,\ x) - X(-t,\ x)), \tag{2}$$

$$X_г(t,\ x) = 0{,}5\,(X(t,\ x) - X(-t,\ x))$$

и построим систему

$$\dot{z} = X_н(t,\ z). \tag{3}$$

Будем считать, что все решения этой системы продолжимы на $\mathbf{R}$. Пусть $z = z(t,\ y)$ есть то решение (3), для которого $z(-\omega,\ y) = y$. Поскольку функция $X_н(t, z)$ непрерывно дифференцируема и нечетна по t, то решение, обладающее таким свойством, обязательно существует [1. С. 13]. Известно также [1. С. 27], что это решение четно и 2ω-периодично по t при любом y. Осуществим в системе (1) замену, полагая $x = z(t,\ y)$. Эта замена сводит (1) к некоторой системе

$$\dot{y} = \left[\frac{\partial z}{\partial y}(t,\ y)\right]^{-1}\left(X(t,\ z(t,\ y)) - \frac{\partial z}{\partial t}(t,\ y)\right) =: Y(t,\ y). \tag{4}$$

Система (4) 2ω-периодическая и имеет такое же отображение за период, как и система (1) [1. С. 27]. Поэтому количество и устойчивость, а также начальные данные 2ω-периодических решений (1) и (4) совпадают. Имеет место

Теорема 1. Для того чтобы преобразование $x = z(t,\ y)$ переводило систему (1) с 2ω-периодичной по t и непрерывно дифференцируемой правой частью в некоторую автономную систему $\dot{y} = Y(y)$, необходимо и достаточно выполнение тождества

$$\frac{\partial X_г(t,\ z)}{\partial t} + \frac{\partial X_г(t,\ z)}{\partial z} X_н(t,\ z) = \frac{\partial X_н(t,\ z)}{\partial z} X_г(t,\ z). \tag{5}$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $x = z(t,\ y)$ преобразует систему (1) в некоторую автономную систему $\dot{y} = Y(y)$. Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial t} = X_н(t,\ z), \tag{6}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}.Y(y) = X(t,\ z). \tag{7}$$

Из (6) и (7) следует, что

$$\frac{\partial z}{\partial y} Y(y) = X(t,\ z) - X_н(t,\ z) = X_г(t,\ z). \tag{8}$$

Продифференцируем (6) по y: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial t} = \dfrac{\partial X_н}{\partial z} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y}$ и умножим обе части этого равенства справа на $Y(y)$. Получим

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial t} \cdot Y(y) = \frac{\partial X_н(t,z)}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \cdot Y(y).$$

На основании (8) это равенство запишется в виде:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial t} \cdot Y(y) = \frac{\partial X_н(t, z)}{\partial z} \cdot X_г(t, z). \tag{9}$$

Продифференцируем равенство (8) частным образом по t

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial t} \cdot Y(y) = \frac{\partial X_г(t, z)}{\partial t} + \frac{\partial X_г(t, z)}{\partial z} \cdot X_н(t, z). \tag{10}$$

Учитывая равенство смешанных производных $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial t \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial t}\right)$, из (9) и (10) заключаем, что

$$\frac{\partial X_н(t, z)}{\partial z} X_г(t, z) = \frac{\partial X_г(t, z)}{\partial t} + \frac{\partial X_г(t, z)}{\partial z} X_н(t, z).$$

А это и есть равенство (5).

Достаточность. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial t} = X_н(t, z) \\ \dfrac{\partial z}{\partial t} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = Y(y) = X(t, z). \end{cases} \tag{11}$$

Подставим в (11) решение $z = z(t, y)$ системы (3). По схеме, предложенной при доказательстве необходимости, приходим к тождеству (5). Следовательно, $z = z(t, y)$ является и решением (11). Из [1. С. 27] следует, что это решение 2ω-периодично и четно по t. Сопоставляя соотношение (4) и второе равенство системы (11), заключаем, что $Y(t, y) = Y(y)$, т. е. система является автономной. А это и доказывает достаточность. Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть для 2ω-периодичной по t и непрерывно дифференцируемой функции $X(t, x)$ выполнено тождество (5), а все решения системы (3) продолжимы на отрезок $[-\omega; \omega]$. Тогда система (1) с решениями $\varphi(t; t_0; x_0)$ имеет такое же отображение за период $x \to \varphi(\omega; -\omega; x)$, как и автономная система

$$\dot{y} = Y(y), \tag{12}$$

где

$$Y(y) ::= \left[\frac{\partial z}{\partial y}(t, y)\right]^{-1} X_г(t, z(t, y)).$$

Доказательство. Из доказательства теоремы 1 следует, что преобразование $x = z(t, y)$ переводит систему (1) в некоторую автономную систему (12). Так как функция $t \to z(t, y)$ удовлетворяет системе (3), то она сохраняет отображение за период [1. С. 12], и система (12) совпадает с системой (4), правая часть которой

$$Y(y) = \left[\frac{\partial z}{\partial y}\right]^{-1} \left(X - \frac{\partial z}{\partial t}\right) = \left[\frac{\partial z}{\partial y}\right]^{-1} X_г.$$

Теорема доказана.

Рассмотрим линейную систему

$$\dot{x} = P(t)x. \tag{13}$$

Соотношение (2) для нее запишется в форме $P_н(t) ::= 0{,}5(P(t) - P(-t)), P_г(t) ::= 0{,}5(P(t) + P(-t))$. Тождество (5) для системы (13) принимает вид:

$$\frac{dP_г(t)}{dt} + P_г(t) P_н(t) = P_н(t) P_г(t). \tag{14}$$

Это приводит к такому следствию.

Следствие. Пусть для 2ω-периодической системы (13) выполнено тождество (14). Тогда 2ω-периодическое преобразование $x = s(t)y$, $\dot{s} = P_н s$, переводит систему (13) в стационарную систему $\dot{y} = s^{-1}(t) P_г(t) s(t) y = ::Ay$.

Пример. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (1 - \sin t + \cos t + 8\cos^2 t)\, x_1 + (3 - \sin t + 9\cos t + 8\cos^2 t)\, x_2, \\ \dot{x}_2 = (-2 + \sin t + 7\cos t - 8\cos^2 t)\, x_1 + (4 + \sin t - \cos t - 8\cos^2 t)\, x_2. \end{cases}$$

Здесь

$$P_г(t) = \begin{bmatrix} 1 + \cos t + 8\cos^2 t & 3 + 9\cos t + 8\cos^2 t \\ -2 + 7\cos t - 8\cos^2 t & 4 - \cos t - 8\cos^2 t \end{bmatrix},$$

$$P_н(t) = \begin{bmatrix} -\sin t & -\sin t \\ \sin t & \sin t \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Поскольку выполнено условие (14), то отображение за период для рассматриваемой системы совпадает с отображением для системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 3x_2, \\ \dot{x}_2 = -2x_1 + 4x_2. \end{cases}$$

Заметим также, что если для системы $\dot{x} = [A + S(t)]x$ с постоянной матрицей A и нечетной $S(t)$ выполняется тождество $AS(t) = S(t)A$, то отображение Пуанкаре этой системы такое же, как и у стационарной системы $\dot{y} = Ay$. Действительно, в этом случае тождество (14) принимает вид $P_г'(t) = 0$, поскольку $P_г P_н = P_н P_г = SA$ и работает следствие.

Список литературы

1. Мироненко В. И. Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений. Мн., 1986.

Поступила в редакцию 17.12.91.

УДК 519.1

А. А. ЗАПОРОЖЕЦ

ПРИМЕНЕНИЕ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ ФИЛЬТРОВ НА ПОВЕРХНОСТНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛНАХ

При оптимальном проектировании секционированных встречно-штыревых преобразователей фильтра на поверхностных акустических волнах (ПАВ) возникает задача построения на промежутке $[0, 2\pi]$ тригонометрического многочлена $P_N(x, a)$ с минимально возможным числом слагаемых N, удовлетворяющего условиям:

$$\beta_k |P_N(x^*, a)| \le |P_N(x, a)| \le \alpha_k |P_N(x^*, a)|, \quad x \in [u_k, v_k), \quad k = \overline{1, m},$$

где x^* – несущая точка, $[u_k, v_k)$ – непересекающиеся интервалы, покрывающие $[0, 2\pi)$ [1]. В силу технологических ограничений полином $P_N(x, a)$ ищется в форме:

$$\sum_{i=1}^{N} a_i (\sin(ix) + \cos(ix)), \text{ где } a_i \in B_3 = \{-1, 0, 1\},$$

при этом за каждым ненулевым коэффициентом a_i следующий ненулевой коэффициент должен иметь противоположный знак [2]. Множество векторов $a \in B_3^N$, удовлетворяющих изложенным требованиям, обозначим через D.

Задачу рассматривают также в следующей дискретной постановке. Пусть $C = C(M, N)$ – матрица с элементами $c_{ji} = \sin(ix_j) + \cos(ix_j)$, $d = d(N)$ – вектор с координатами

$$d_i = \sin(ix^*) + \cos(ix^*), \quad i = \overline{1, N},$$

где x_j – точки интервала $[0, 2\pi)$, $j = \overline{1, M}$. Очевидно, что

$$P_N(x_j, a) = (c^j, a), \text{ а } P_N(x^*, a) = (d, a),$$

где c^j – j-я строка матрицы с. Необходимо найти при минимальном значении N вектор $a \in D$, удовлетворяющий следующей системе неравенств: