УДК 517.977

А. О. АБДУРАХИМОВ

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ НЕПРЕРЫВНОЙ СИСТЕМОЙ С НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ В КРИТЕРИИ КАЧЕСТВА

Постановка задачи. Основные определения. Пусть $K = \{1, \dots, l\}$, $J = \{1, \dots, n\}$, $R = \{1, \dots r\}$ – заданные конечные множества индексов; $D_k = D'_k \geq 0$, $k \in K_0 \{0\} \cup K$, – $n \times n$ – матрицы; a_k, $k \in K_0$, – n – векторы; b_k, $k \in K_0$, – скаляры; $f_k(x) = x'D_k x/2 + a'_k x + b_k$, $k \in K_0$.

В классе кусочно-непрерывных r-вектор-функций $u = u(.) = (u_r(t)\ \ r \in R)$, $t \in T = [t_*, t^*]$, рассмотрим задачу

$$J(u, \xi) = f_0(x(t^*)) + \sum_{k \in K} \xi_k f_k(x(t^*)) \to \min_u, \tag{1}$$

$$\dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(t_*) = x_0, \tag{2}$$

$$u_* \leq u(t) \leq u^*, \ t \in T, \tag{3}$$

$$\xi \in \Xi = \left\{ \xi = (\xi_k, k \in K) : \xi_{*k} \leq \xi_k \leq \xi^*_k, \ k \in K \right\}. \tag{4}$$

Здесь $x(t)$ – n-вектор состояния системы управления в момент времени t; x_0 – начальное состояние; $u(t)$, $t \in T$, – r-мерное управляющее воздействие; ξ – k-вектор неконтролируемых возмущений; $A(t)$, $B(t)$, $t \in T$, – непрерывные $n \times n$-, $n \times r$ – матричные функции; u_*, u^* – r-векторы ограничений на управляющие воздействия.

Понятия траектории динамической системы, допустимых управления и траектории определяются так же, как в [1]. Качество каждого допустимого управления $u(t)$, $t \in T$, будем оценивать по гарантированному значению критерия качества.

Определение 1. Число $J_0 = J_0(u) = f(x(t^*))$:

$$J_0 = \max_{\xi \in \Xi} f(x(t^*), \xi)$$

назовем гарантированным значением критерия качества на допустимом управлении $u(t)$, $t \in T$.

Определение 2. Допустимое управление $u^0(t)$, $t \in T$, и соответствующая ему траектория $x^0(t)$, $t \in T$, называются оптимальными, если

$$J_0(u^0) = f(x^0(t^*)) = \min_u \max_{\xi \in \Xi} f(x(t^*), \xi).$$

Сведение задачи (1) – (4) к негладкой задаче оптимального управления. Пусть $u(t)$, $t \in T$, – допустимое управление. С помощью формулы Коши [2] подсчитаем на нем числа $\alpha_k = \alpha_k(x(t^*)) = f_k(x(t^*))$, $k \in K$.

Рассмотрим задачу

$$\varphi(\xi) = \sum_{k \in K} \xi_k \alpha_k \to \max_{\xi}, \tag{5}$$

$$\xi_{*k} \leq \xi_k \leq \xi^*_k, \ k \in K.$$

Построим множества

$$K^+ = K^+(x(t^*)) = \{k \in K: \alpha_k > 0\};$$

$$K^- = K^-(x(t^*)) = \{k \in K: \alpha_k < 0\};$$

$$K^0 = K^0(x(t^*)) = \{k \in K; \alpha_k = 0\}.$$

Множество K^0 разобьем на непересекающиеся подмножества

$$K^{0+},\ K^{0-}:\ K^{0+} \cup K^{0-} = K^0,\ K^{0+} \cap K^{0-} = \phi.$$

Обозначим: $\bar{K}^+ = K^+ \cup K^{0+}$, $\bar{K}^- = K^- \cup K^{0-}$.

Множество всевозможных разбиений вида $p = \{K^{0+};\ K^{0-}\}$ обозначим через P. Очевидно, что вектор $\xi^0 = (\xi^0_k,\ k \in K)$ с компонентами

$$\xi_k^0 = \xi_k^0\left(x(t^*)\right) = \begin{cases} \xi_k^*, & \text{если } k \in \bar{K}^+; \\ \xi_{*k}, & \text{если } k \in \bar{K}^-, \end{cases}$$

является решением задачи (5). С помощью этого вектора запишем задачу (1) – (4) в виде:

$$J_0(u) = f_0\left(x(t^*)\right) + \sum_{k \in K} \xi_k^0\left(x(t^*)\right) f_k\left(x(t^*)\right) \to \min_u,$$

$$\dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(t_*) = x_0, \tag{6}$$

$$u_* \le u(t) \le u^*, \ t \in T.$$

Сглаживание задачи. Следуя [3], набору $p \in P$ поставим в соответствие множество:

$$X(p) = \left\{x \in R^n \colon \alpha_k(x) \ge 0, \ k \in \bar{K}^+; \ \alpha_k(x) \le 0, \ k \in \bar{K}^-\right\}.$$

Это множество в аналитической форме определяется системой нелинейных (квадратичных) неравенств:

$$f_k(x) \ge 0, \ k \in \bar{K}^+; \quad f_k(x) \le 0, \quad k \in \bar{K}^-.$$

Пусть $\bar{u}(t) = u(t) + \Delta u(t), \ t \in T,$ – произвольное допустимое управление, $\bar{x}(t) = x(t) + \Delta x(t), \ t \in T,$ – соответствующая ему траектория.

Обозначим:

$$D = D_0 + \sum_{k \in K} \xi_k^0 D_k; \quad a = a_0 + \sum_{k \in K} \xi_k^0 a_k;$$

$$c = a + Dx(t^*), \quad c_k = a_k + D_k x(t^*), \quad k \in K.$$

В области X(p), соответствующей фиксированному элементу $p \in P$, сформируем задачу

$$\Delta x'(t^*) D \Delta x(t^*)/2 + c' \Delta x(t^*) \to \min_{\Delta u},$$

$$\Delta \dot{x} = A(t)\Delta x(t) + B(t)\Delta u(t), \quad \Delta x(t_*) = 0,$$

$$u_* - u(t) \le \Delta u(t) \le u^* - u(t), \quad t \in T,$$

$$\Delta x'(t^*) D_k \Delta x(t^*)/2 + c_k' \Delta x(t^*) \ge -\alpha_k, \quad k \in \bar{K}^+;$$

$$\Delta x'(t^*) D_k \Delta x(t^*)/2 + c_k' \Delta x(t^*) \le -\alpha_k, \quad k \in \bar{K}^-. \tag{7}$$

Гладкую задачу оптимального управления (7) будем называть (u(.), p) – квадратизацией задачи (6). Совокупность гладких задач оптимального управления (7), соответствующих всевозможным наборам $p \in P$, назовем сглаживанием задачи (6).

Задача (7) имеет, по крайней мере, одно допустимое управление $\Delta u(t) \equiv 0$, $t \in T$. Очевидно, что если $u^0(t)$, $t \in T$, – оптимальное управление задачи (6), то $\Delta u^0(t) \equiv 0$, $t \in T$, является оптимальным управлением в задаче (7).

Линеаризация задачи. Пусть $\Delta u(t)$, $t \in T$, – допустимое управление задачи (7). Линеаризовав вдоль управления $\Delta u(t) \equiv 0$, $t \in T$, (в окрестности точки $\Delta x(t^*) = 0$) критерий качества и функции ограничений (7), получим задачу:

$$c' z(t^*) \to \min_w.$$

$$\dot{z} = A(t)z(t) + B(t)w(t), \ z(t_*) = 0,$$

$$c_k' z(t^*) \ge -\alpha_k, \ k \in \bar{K}^+; \ c_k' z(t^*) \le -\alpha_k, \ k \in \bar{K}^-; \tag{8}$$

$$u_* - u(t) \le w(t) \le u^* - u(t), \ t \in T.$$

Задачу (8) назовем (u(.), p) – линеаризацией задачи (6). Если $u^0(t)$,

$t \in T$, – оптимальное управление задачи (6), то функция $w^0(t) \equiv 0$, $t \in T$, является оптимальным управлением в задаче (8).

Опора. Опорное управление. Пусть $K_{оп}$ – произвольное подмножество множества K;

$$K_{оп} = \bar{K}^+_{оп} \cup \bar{K}^-_{оп}, \ \bar{K}^+_{оп} \subset \bar{K}^+, \ \bar{K}^-_{оп} \subset \bar{K}^-.$$

На отрезке T выберем конечное множество моментов

$$T_{оп} = \{t_j, \ j \in J_{оп}\}, \ t_j < t_{j+1}, \ J_{оп} \subset J, \ |J_{оп}| \le |K_{оп}|.$$

Каждому моменту t_j поставим в соответствие такой набор индексов

$$R_{оп}(t_j) = R^j_{оп} \subset R, \text{ что } |K_{оп}| = |R_{оп}|, \ R_{оп} = \{R^j_{оп}, \ j \in J_{оп}\}.$$

Введя обозначение $S_{оп} = \{T_{оп}, R_{оп}\}$, составим матрицу

$$\Phi_{оп} = \Phi(K_{оп}, S_{оп}) = (c_k(l)t_j), \ (k \in K_{оп}, \ l \in R_{оп}),$$

где

$$c_k(t) = B'(t)F'(t^*, t)(a_k + D_k x(t^*)), \ k \in K.$$

Определение 3. Совокупность $M_{оп}(p) = \{K_{оп}, S_{оп}\}$ назовем (локальной) опорой основных ограничений на допустимом управлении $u(.)$, матрицу $\Phi_{оп} = \Phi(M_{оп}(p))$ – (локальной) опорной матрицей, если $\det \Phi_{оп} \neq 0$.

Определение 4. При фиксированном $p \in P$ пару $\{u(.), M_{оп}(p)\}$ из допустимого управления и опоры ограничений назовем опорным управлением задачи (6). Опорное управление будем называть невырожденным, если значения опорных компонент управления в опорные моменты некритические:

$$u_{*l} < u_l(t) < u^*_l, \ l \in R_{оп}(t), \ t \in T_{оп},$$

и выполняются неравенства

$$\alpha_k > 0, \ k \in \bar{K}^+_н = \bar{K}^+ \setminus \bar{K}^+_{оп}; \ \alpha_k < 0, \ k \in \bar{K}^-_н = \bar{K}^- \setminus \bar{K}^-_{оп}.$$

Необходимые условия оптимальности. Опорному управлению поставим в соответствие (локальный) вектор потенциалов:

$$\nu'_{оп} = \nu'(K_{оп}|u(.), p) = c'_{оп}Q, \tag{9}$$

где

$$c_{оп} = (c_l(t_j), \ j \in J_{(l)}, \ l \in R),$$

$$c(t) = B'(t)F'(t^*, t)(a + Dx(t^*)); \ Q = \Phi^{-1}_{оп}.$$

Функцию

$$\Delta(t) = \Delta(t, u(.)|p) = H^{оп'}(t)\nu_{оп} - c(t), \ t \in T, \tag{10}$$

назовем (локальным) коуправлением, сопровождающим опору $M_{оп}|p)$. Здесь $H^{оп}(t) = H^{оп}(K_{оп}, R/t) = (c_k(R/t), \ k \in K_{оп})$.

Пусть $\{u^0(.), M^0_{оп}(p)\}$, – невырожденное опорное управление. При $w(t) \equiv 0$, $t \in T$, из (u, p) – линеаризации (8) получаем: для локальной оптимальности допустимого управления $u^0(t)$, $t \in T$, в задаче (8) необходимо выполнение соотношений:

$$\nu^0_k \ge 0 \text{ при } \alpha_k = 0; \ \nu^0_k = 0 \text{ при } \alpha_k > 0, \ k \in \bar{K}^+_{оп}; \tag{11}$$

$$\nu^0_k \le 0 \text{ при } \alpha_k = 0; \ \nu^0_k = 0 \text{ при } \alpha_k < 0, \ k \in \bar{K}^-_{оп};$$

$$\Delta^0_l(t) \ge 0 \text{ при } u^0_l(t) = u^*_l,$$

$$\Delta^0_l \le 0 \text{ при } u^0_l(t) = u_{*l}. \tag{12}$$

$$\Delta^0_l(t) = 0 \text{ при } u_{*l} < u^0_l(t) < u^*_l, \ (t \in T, \ l \in R).$$

Сформулируем приведенные условия оптимальности в виде принципа максимума. Пусть $\psi(t)$, $t \in T$, – решение (котраектория) сопряженной системы

$$\dot{\psi} = -A'(t)\psi, \ \psi(t^*) = H^{оп'}\nu_{оп} - c, \qquad (13)$$

где

$$H^{оп} = (c_{kj,\ j\in J} \ k \in K_{оп}).$$

Положим

$$H(\psi, u, t) = \psi' B(t) u,$$

$$H(\psi^0(t), u^0(t), t) = \max_{u_* \le u \le u^*} H(\psi^0(t), u, t), \ t \in T, \qquad (14)$$

$$\nu^0_k \alpha_k = 0, \ k \in K_{оп}. \qquad (15)$$

Нетрудно заметить, что соотношения (11) – (12) эквивалентны условиям (14) – (15) соответственно.

Таким образом, получен

Опорный принцип максимума. Пусть $\{u^0(.),\ M^0_{оп}(p)\}$ – невырожденное опорное управление. Для локальной оптимальности допустимого управления $u^0(t)$, $t \in T$, в задаче (6) необходимо, чтобы вдоль опорного управления и соответствующих ему траекторий $\psi^0(t)$, $t \in T$, сопряженной системы (15) и вектора ν^0, (9) выполнялись два условия: 1) максимума (16) и 2) дополняющей нежесткости (17).

Соотношения (9) – (15) получены для фиксированного набора p и опоры $M_{оп}$. Обозначим через $P(M_{оп})$ совокупность наборов $p \in P$, для которых соотношения (11), (12), (14), (15) выполняются с опорой $M_{оп}$. Справедливо следующее пакетное необходимое условие оптимальности [4].

Для оптимальности в задаче (6) допустимого управления $u^0(t)$, $t \in T$, необходимо существование такого пакета опор $M^s_{оп}$, $s = \overline{1, \tau}$, что:

1) $\cup^{\tau}_{s=1} P(M^s_{оп}) = P$, $P(M^i_{оп}) \cap P(M^д_{оп}) = \phi$, i, $д = \overline{1, \tau}$, $i \ne д$;

2) для сопровождающих его векторов $\nu^0(M^s_{оп}/p)$ и коуправлений

$$\Delta^0(M^s_{оп}/p), \ p \in P(M^s_{оп}), \ s = \overline{1, \tau},$$

выполняются соотношения (11), (12).

Экстремальную форму этого результата назовем пакетным опорным принципом максимума: для оптимальности в задаче (6) допустимого управления $u^0(t)$, $t \in T$, необходимо существование такого пакета опор $M^s_{оп}$, $s = \overline{1, \tau}$, что: 1) $\cup^{\tau}_{s=1} P(M_{оп}{}^s) = P$, $P(M_{оп}{}^i) \cap P(M_{оп}{}^д) = \phi$, i, $д = \overline{1, \tau}$, $i \ne д$; 2) вдоль опорных управлений $\{u^0(.), u^s_{оп}\}$, $s = \overline{1, \tau}$, и соответствующих им траекторий

$$\psi^0(t, M^s_{оп}/p), \ t \in T, \ p \in P(M^s_{оп}), \ s = \overline{1, \tau},$$

сопряженной системы (13) и векторов

$$\nu^0(M^s_{оп}/p), \ p \in P(M^s_{оп}), \ s = \overline{1, \tau},$$

выполняются условия: максимума (14) и дополняющей нежесткости (15).

Список литературы

1. Габасов Р., Кириллова Ф. М. и др. Конструктивные методы оптимизации. Мн., 1984—1987. Ч. 1—4.
2. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Оптимизация линейных систем. Мн., 1973.
3. Абдурахимов А. О. Гарантированная минимизация совокупности квадратичных функций // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1991. № 2. С. 67.
4. Абдурахимов А. О. Линейно-квадратичная задача оптимального управления с неопределенностью в критерии качества / Редкол. журн. «Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех.» Мн., 1991. 37 с. Деп. в ВИНИТИ 28.03.91. № 1369-В91.

Поступила в редакцию 22.11.91.