

Теорема. Представление $R_* = D_*^{-1} C^{-1} R C D_*$ группы G есть точное абсолютно неприводимое представление $G \rightarrow GL_n(O_*)$ матрицами, сравнимыми с $E \pmod{\Phi}$, и при различных Φ эти представления попарно целочисленно (в кольце O) неэквивалентны.

Замечание 3. Пусть $G \subset GL_n(O)$ – конечная подгруппа, содержащая матрицы, сравнимые с E по модулю какого-либо ненулевого идеала I дедекиндова кольца $O \neq I$, и Γ – группа, действующая на G . Тогда из тождества (1) следует, что G содержит нетривиальную абелеву подгруппу H , допускающую Γ как группу автоморфизмов. В качестве H можно выбрать подгруппу G , порожденную матрицей $g \in G$, сравнимой с E по модулю минимального идеала $J(g) \neq O$ кольца O из множества $\{J(g) \mid g \equiv E \pmod{J(g)}, E \neq g \in G\}$, и всеми сопряженными с ней относительно действия Γ ; если выбрать g порядка p , то H – группа экспоненты p , где p – простое число, и мы получаем представление $\Gamma \rightarrow GL_m(F_p)$ над полем F_p из p элементов, естественным образом рассматривая H как $F_p \Gamma$ – модуль.

Список литературы

1. Minkowski H. // Journ. reine angew. Math. 1887. Bd. 100. H. 4. S. 449.
2. Ibid. Bd. 101. H. 3. S. 196.
3. Minkowski H. // Geometrie der Zahlen. Leipzig, 1910. S. 186.
4. Кэртис Ч., Райнер И. // Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. М., 1969. С. 534.
5. Burgisser B. // Math. Ann. 1981. Bd. 256. H. 1. S. 121.
6. Малинин Д. А. // Докл. АН СССР. 1989. Т. 309. № 5. С. 1060.

Поступила в редакцию 13.06.91.

УДК 514.74

О. Е. АРСЕНЬЕВА

СПИНОРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ АЛГЕБРЫ ОБОБЩЕННЫХ КВАТЕРНИОНОВ

В настоящей работе показано, что спинорное пространство естественно соотносится с 4-мерным (псевдо)евклидовым пространством V на базе алгебры кватернионов, которая, как известно, естественно порождается пространством автодуальных форм на V .

1. Алгебра α -кватернионов. Пусть A – алгебра над полем F , $\text{char } F \neq 2$, с единицей 1 и инволюцией $a \rightarrow \bar{a} (a \in A)$, причем $a + \bar{a} \in F$, $a\bar{a} \in F$. Напомним, что процедура удвоения Кэли – Диксона позволяет по каждому ненулевому элементу $\alpha \in F$ построить новую алгебру (A, α) , представляющую собой F -модуль $F^2 = F \oplus F$, с операцией умножения $(a_1, a_2)(b_1, b_2) = (a_1 b_1 + \alpha b_2 \bar{a}_2, \bar{a}_1 b_2 + b_1 \bar{a}_2)$. При этом A вкладывается в (A, α) как подалгебра пар вида $\{(a, 0) \mid a \in A\}$. Если обозначить $i = (0, 1) \in (A, \alpha)$, то $i^2 = \alpha$ и с учетом сделанного отождествления $(A, \alpha) = A \oplus iA$. Заметим, что (A, α) – также алгебра над F с инволюцией: если $x = a_1 \oplus i a_2 \in (A, \alpha)$, то $\bar{x} = a_1 - i a_2$. Эта инволюция обладает аналогичными свойствами: $x + \bar{x} \in F$, $x\bar{x} \in F$.

Если $A = F = \mathbb{R}$, то $(\mathbb{R}, \alpha) = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$ с точностью до умножения i на постоянный множитель $\sqrt{|\alpha|}$ есть либо поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел ($\alpha = -1$), либо кольцо $\mathbb{D}$ двойных чисел ($\alpha = 1$). Обозначим $(\mathbb{R}, \alpha)$ символом R_α .

Применяя к R_α процедуру Кэли – Диксона, получим алгебру $((R_\alpha, \alpha), \beta) = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R} \oplus j\mathbb{R} \oplus k\mathbb{R}$ (где $j = (0, 1) \in (R_\alpha, \beta)$, $k = ij$), которая называется алгеброй обобщенных кватернионов. Эта алгебра с точностью до умножения i и j на константы $\sqrt{|\alpha|}$ и $\sqrt{|\beta|}$ соответственно (которое назовем калибровкой) есть либо тело $\mathbb{H}$ кватернионов ($\alpha = \beta = -1$), либо кольцо $\mathbb{H}'$ антикватернионов ($\alpha = \beta = 1$) (случай $\alpha\beta < 0$ соответствует алгебре антикватернионов). Поскольку калибровка не вносит существенных изменений в свойства алгебры обобщенных кватернионов, будем считать эту алгебру откалиброванной, обозначать $H_\alpha = ((R_\alpha, \alpha), \alpha)$; $\alpha = \pm 1$ и называть алгеброй α -кватернионов.

Из сказанного следует, что всякий α -кватернион $q \in H_\alpha$ допускает представление в виде $q = z_1 + jz_2$; $z_1, z_2 \in R_\alpha$, $j^2 = \alpha$, что позволяет естественным образом построить представление алгебры H_α в алгебру $\text{End}(S)$ эндомор-

физмов алгебры H_* , рассматриваемой как R_* -модуль $S = R_* \oplus R_*$, который мы будем называть α -спинвекторным пространством. Именно, пусть

$$q = z_1 + jz_2 \in H_*, X = (X_1, X_2) \in S.$$

Положим $[q]X = q(X_1 + jX_2) = (z_1X_1 + \alpha\bar{z}_2X_2) + j(z_2X_1 + z_1X_2)$. Очевидно, матрица эндоморфизма $[q]$ в базисе $\{1, j\}$ имеет вид:

$$(q) = \begin{bmatrix} z_1 & \alpha\bar{z}_2 \\ z_2 & \bar{z}_1 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Заметим, что α -спинвекторное пространство S внутренним образом наделено инволюцией $\tau: X \rightarrow \bar{X}$, порожденной оператором сопряжения α -кватернионов и которую мы назовем операцией сопряжения α -спинвекторов. Кроме того, S внутренним образом наделено эрмитовой метрикой «, .». Именно, пусть $X = (z_1, z_2) \in S$. Обозначим $z_1 = \operatorname{Re} X$, $z_2 = \operatorname{Im} X$. Поскольку $\bar{X} = (\bar{z}_1, -z_2)$, $\operatorname{Re} \bar{X} = \operatorname{Re} X$, $\operatorname{Im} \bar{X} = -\operatorname{Im} X$. Пусть далее $Y = (u_1, u_2)$ — другой α -спинвектор. Положим

$$\langle X, Y \rangle = \operatorname{Re} (\bar{X}Y) = z_1u_1 - \alpha z_2u_2.$$

Очевидно, это — невырожденная эрмитова форма, причем

$$\langle qX, qY \rangle = \operatorname{Re} (\overline{qX} qY) = \operatorname{Re} (\bar{X}q qY) = |q|^2 \langle X, Y \rangle.$$

Таким образом, получено

Предложение 1. Естественное представление неизотропных вещественно нормированных α -кватернионов в спинвекторном пространстве S реализуется конформными эндоморфизмами модуля S .

Заметим, что

$$|q|^2 = q\bar{q} = (z_1 + jz_2)(\bar{z}_1 - jz_2) = z_1\bar{z}_1 - \alpha z_2\bar{z}_2 = \det(q) = \det[q].$$

В частности, единичные α -кватернионы, которые в силу композиционности алгебры H_* образуют мультипликативную подгруппу кольца $\operatorname{End}(S)$, при этом представлении реализуются как унитарные унимодулярные эндоморфизмы модуля S . Таким образом, получаем

Предложение 2. Мультипликативная подгруппа единичных α -кватернионов в естественном представлении отождествляется с группой Ли $SU(2, R_*) = SP_*(1)$.

Замечание. При $\alpha = 1$ группа Ли $SU(2, R_1)$ естественно изоморфна группе Ли $SL(2, R)$. Этот изоморфизм, позволяющий отождествить данные группы, сопоставляет матрице

$$\begin{bmatrix} x_1 + iy_1 & x_2 - iy_2 \\ x_2 + iy_2 & x_1 - iy_1 \end{bmatrix} \in SU(2, R_*)$$

матрицу

$$\begin{bmatrix} x_1 + y_1 & x_2 - y_2 \\ x_2 + y_2 & x_1 - y_1 \end{bmatrix} \in SL(2, R).$$

В частности, алгебры Ли $\mathfrak{su}(2, R_*)$ полупросты.

Группа Ли $SU(2, R_*)$ — это трехмерная группа Ли, которая действует на своей алгебре Ли $\mathfrak{su}(2, R_*)$ посредством присоединенного представления

$$\operatorname{Ad}(g)X = gXg^{-1} \quad (g \in SU(2, R_*), X \in \mathfrak{su}(2, R_*)),$$

ортогонального относительно формы Киллинга этой алгебры Ли. В силу этого, а также в силу связности группы Ли $SU(2, R_*)$ образ отображения Ad лежит в группе Ли $SO(2 - \alpha, 1 + \alpha; R)$. Тем самым внутренним образом определен гомоморфизм $w = \operatorname{Ad}: SU(2, R_*) \rightarrow SO(2 - \alpha, 1 + \alpha; R)$. В силу полупростоты группы Ли $SU(2, R_*)$ отображение w , являющееся присоединенным представлением ее алгебры Ли, невырождено, и, поскольку $\dim \mathfrak{su}(2, R_*) = \dim \mathfrak{so}(2 - \alpha, 1 + \alpha; R) = 3$, оно является изоморфизмом алгебр Ли, а следовательно, отображение w — (двулистное) накрывающее отображение. (Двузначное) отображение $w^{-1}: SO(3, R) \rightarrow SU(2, C)$ в

случае $\alpha = -1$ есть классическое спинорное представление ортогональной группы. В случае произвольной алгебры H_α мы сохраним эту терминологию.

Заметим, что пространство $IQ \subset H_\alpha$ чисто мнимых α -кватернионов канонически отождествляется с пространством алгебры Ли $su(2, R_\alpha)$, которая, в свою очередь, с помощью отображения $w. = ad: su(2, R_\alpha) \rightarrow so(2 - \alpha, 1 + \alpha; R)$ допускает каноническое отождествление с алгеброй Ли $so(2 - \alpha, 1 + \alpha; R)$. При этих отождествлениях чисто мнимому α -кватерниону $q = ia + jb + kc$, согласно (1), отвечает матрица

$$(q) = \begin{bmatrix} ia & \alpha(b + ic) \\ b - ic & -ia \end{bmatrix},$$

которая является элементом алгебры Ли $su(2, R_\alpha)$. При этом $[(q_1), (q_2)] = (q_1)(q_2) - (q_2)(q_1)$, и в силу сделанного отождествления пространство IQ приобретает структуру алгебры Ли, изоморфной $su(2, R_\alpha)$, с операцией $[q_1, q_2] = q_1 q_2 - q_2 q_1$. Кроме того, $w.(q)X = ad(q)X = (q)X - X(q)$, откуда в базисе $\{(i), (j), (k)\}$ имеем:

$$w.(q) = \begin{bmatrix} 0 & 2\alpha c & -2\alpha b \\ -2\alpha c & 0 & 2\alpha a \\ -2b & 2a & 0 \end{bmatrix}.$$

С учетом этого легко подсчитать, что $-\text{tr}(w.(q)w.(q)) = -4\text{tr}((q)(q)) = 8q\bar{q}$ т. е. справедливо

Предложение 3. Норма чисто мнимых α -кватернионов как элементов алгебр Ли $su(2, R_\alpha)$ или $so(2 - \alpha, 1 + \alpha; R)$ в метрике Киллинга лишь постоянным множителем (-2) или (-8) соответственно отличается от их норм как элементов алгебры H_α .

2. Спинбазисы. Норма $|q|^2 = \bar{q}q$ α -кватернионов позволяет рассматривать алгебру H_α как вещественное евклидово пространство, скалярное произведение в котором восстанавливается поляризацией:

$$\langle q_1, q_2 \rangle = \frac{1}{2} (\bar{q}_1 q_2 + \bar{q}_2 q_1); \quad q_1, q_2 \in H_\alpha. \quad (2)$$

Заметим, что

$$\text{Im}(\bar{q}_1 q_2) = \text{Im}(\overline{\bar{q}_2 q_1}) = -\text{Im}(\bar{q}_2 q_1),$$

в силу чего $\langle q_1, q_2 \rangle = 1/2 \{ \text{Re}(\bar{q}_1 q_2) + \text{Re}(\bar{q}_2 q_1) \}$. Вспоминая определение формы «..», получаем:

$$\langle X, Y \rangle = \frac{1}{2} \{ \langle X, Y \rangle + \langle Y, X \rangle \}; \quad X, Y \in S. \quad (3)$$

Более того, очевидно, что

$$\langle X, Y \rangle = \langle X, Y \rangle + i \langle X, i^3 Y \rangle; \quad X, Y \in S. \quad (4)$$

Вернемся к рассмотрению (2). Пусть, в частности, $q_1, q_2 \in IQ$. Тогда $\bar{q}_1 = -q_1, \bar{q}_2 = -q_2$, и (2) принимает вид:

$$q_1 q_2 + q_2 q_1 = -2 \langle q_1, q_2 \rangle; \quad q_1, q_2 \in IQ. \quad (5)$$

В качестве следствия получаем

Предложение 4. Система $\{j_1, j_2, j_3\} \subset IQ$ образует ортонормированный базис пространства IQ тогда и только тогда, когда

$$j_k j_m + j_m j_k = \begin{cases} \pm 2 & (k = m) \\ 0 & (k \neq m). \end{cases}$$

Например, система $\{i, j, k\}$ образует ортонормированный базис в IQ . Напомним, что матрицы, которые имеют эти элементы как эндоморфизмы R_α -модуля S , согласно (1), имеют вид:

$$\sigma_1 = (i) = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}; \quad \sigma_2 = (j) = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \sigma_3 = (k) = \begin{bmatrix} 0 & \alpha i \\ -i & 0 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Мы видим, что в случае $\alpha = -1$ эти матрицы лишь множителем отличаются от классических матриц Паули. Назовем их обобщенными матрицами Паули.

Теорема 1. Для любого ортонормированного базиса $\{j_1, j_2, j_3\}$ пространства IQ существует ортонормированный базис $\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ R_α -модуля S , в котором $(j_1) = \sigma_1$, $(j_2) = \sigma_2$, $(j_3) = \pm\sigma_3$. Этот базис определен с точностью до действия группы $U(1, R_\alpha)$, вложенной в $U(2, R_\alpha)$ диагональными матрицами.

Доказательство. Рассмотрим векторы

$$\epsilon'_1 = \frac{X + i[j_1]^3 X}{|X + i[j_1]^3 X|} \quad \text{и} \quad \epsilon'_2 = \frac{X - i[j_1]^3 X}{|X - i[j_1]^3 X|},$$

где $X \in S$ – любой вектор, не являющийся собственным вектором оператора $[j_1]$, i – мнимая единица кольца R_α . Очевидно, это единичные собственные векторы оператора $[j_1]$ с собственными значениями i и $(-i)$ соответственно. В силу одномерности собственных подпространств этого оператора каждый из данных векторов определен с точностью до умножения на элемент $z \in R_\alpha$, $|z| = 1$. Легко видеть, что в базисе

$$\{\epsilon'_1, \epsilon'_2\}; (j_2) = \begin{bmatrix} 0 & \alpha a \\ a & 0 \end{bmatrix}; a \in R_\alpha, |a|^2 = 1.$$

Полагая $\epsilon_1 = x\epsilon'_1$, $\epsilon_2 = y\epsilon'_2$, где x, y – единичные элементы кольца R_α , удовлетворяющие условию $xy^{-1} = \alpha a^{-1}$, легко убедиться, что в базисе $\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$, определенном с точностью до умножения его элементов на $z \in R_\alpha$, $|z| = 1$, $(j_2) = \sigma_2$, $(j_3) = \pm\sigma_3$.

Определение 1. Ортонормированный базис R_α -модуля S , отвечающий ортонормированному базису вещественного пространства чисто мнимых α -кватернионов, назовем спинбазисом.

Нетрудно доказать

Предложение 5. Ортонормированный базис $\{j_1, j_2, j_3\}$ пространства IQ имеет ту же ориентацию, что и базис $\{i, j, k\}$ этого пространства тогда и только тогда, когда в спинбазисе, отвечающем базису $\{j_1, j_2, j_3\}$, $(j_k) = \sigma_k$; $k = 1, 2, 3$.

3. Орбиты линейных представлений алгебры α -кватернионов. Пусть фиксировано точное линейное представление алгебры H_α . Тогда эта алгебра реализуется как подалгебра алгебры $\text{End}(V)$ эндоморфизмов (вещественного) линейного пространства V . Рассмотрим орбиту $\text{Orb } X = \{Y \in VI, Y = q(X); q \in H_\alpha\}$ ненулевого элемента $X \in V$. Ее можно рассматривать как образ гомоморфизма $X: H_\alpha \rightarrow V$; $X(q) = q(X)$. Очевидно, если $X \in V$ не принадлежит ядру изотропного α -кватерниона, то $\ker X = \{0\}$ и, значит, $\dim \text{Orb } X = 4$.

Чтобы изучить случай, когда X принадлежит ядру изотропного α -кватерниона, произведем следующее построение. Рассмотрим R_α -модуль

$$V^{R_\alpha} = V_R \times R_\alpha.$$

и естественно индуцированное линейное представление алгебры H_α на V^{R_α} , которое назовем расширенным представлением этой алгебры. Пусть $\{id, I, J, K\}$ – ортонормированный базис пространства H_α . Очевидно,

$$V^{R_\alpha} = D_1^1 \times D_1^{-1},$$

где D_1^i – собственный подмодуль оператора I с собственным значением λ , i – мнимая единица кольца R_α ; $i^2 = \alpha$. При этом $\sigma = \frac{1}{2}(id + iI^3)$ – проектор на D_1^1 ; $JID_1^1: D_1^1 \rightarrow D_1^{-1}$ – изоморфизм R_α -модулей. Пусть

$$X \in D_1^1, q = a id + bI + cJ + dK \in H_\alpha.$$

Тогда

$$q(X) = (a + bi)X + (c - di)JX; q(JX) = \alpha(c + di)X + (a - bi)JX.$$

Таким образом $\text{Orb } X = L(X, JX)$. В частности, $\dim \text{Orb } X = 2$, причем

$$(q | \text{Orb } X) = \begin{bmatrix} a + bi & \alpha(c + di) \\ c - di & a - bi \end{bmatrix}.$$

Получено

Предложение 6. Орбиты собственных векторов α -кватернионов с чисто мнимыми собственными значениями двумерны и имеют естественную структуру α -спинвекторного пространства.

Пусть теперь $X \in V^{R_a}$ – произвольный элемент. Тогда

$$X = a + u, \quad a \in D_1^1, \quad u \in D_1^{-1}.$$

Значит, $\text{Orb} X = L(a, Ja, u, Ju) = L(a, Ju) \oplus L(Ja, u)$. В самом деле,

$$L(a, Ju) \subset D_1^1, \quad L(Ja, u) \subset D_1^{-1},$$

и поскольку

$$D_1^1 \cap D_1^{-1} = \{0\}, \quad L(a, Ju) \cap L(Ja, u) = \{0\}.$$

Таким образом, либо $\dim \text{Orb} X = 2$, либо $\dim \text{Orb} X = 4$, причем $\dim \text{Orb} X = 2$ тогда и только тогда, когда векторы $\{a, Ju\}$ линейно зависимы. Поэтому в первом случае $\text{Orb} X$ есть орбита собственного вектора a (или u), имеющая, как мы видели, естественную структуру α -спинвекторного пространства, а во втором случае $\text{Orb} X$ есть прямая сумма двух таких сопряженных пространств. В связи с этим введем

Определение 2. Двумерные орбиты расширенного линейного представления алгебры α -кватернионов назовем спинорными подпространствами, а его четырехмерные орбиты – биспинорными подпространствами пространства V^{R_a} .

Рассмотрим, наконец, случай, когда $X \in V$. Тогда $X = a + \tau a$, $a = \sigma X$, где $\tau: V^{R_a} \rightarrow V^{R_a}$ – оператор естественного сопряжения. Значит,

$$\text{Orb} X = L(a, Ja, \tau a, J\tau a) = L(a, J\tau a) \oplus L(Ja, \tau a).$$

В этом случае $\dim \text{Orb} X = 2$ тогда и только тогда, когда векторы $\{Ja, \tau a\}$ линейно зависимы. Пусть $Ja = \lambda \tau a$, $\lambda \in R_a$. В этом случае

$$J^2 a = \lambda J\tau a = \lambda \tau(\lambda \tau a) = \lambda \bar{\lambda} a, \quad \lambda \in R_a.$$

С другой стороны, $J^2 a = \alpha a$. Значит, $|\lambda|^2 = \alpha$. Если $R_a = \mathbb{C}$, то $\alpha = -1$ и, значит, этот случай невозможен. Следовательно, $R_a = \mathbb{D}$, $\alpha = 1$, $|\lambda| = 1$. Кроме того, $\tau Ja = \lambda a$. Но

$$\tau Ja = \frac{1}{2} \tau(JX + iJIX) = \frac{1}{2} (JX - iJIX) = \frac{1}{2} (JX + iJIX) = \frac{1}{2} \bar{\lambda} (X + iIX),$$

откуда $JX = \bar{\lambda} X$ и, значит, $\lambda = \pm 1$, т. е. $X \in D_1^1$. Обратно, если $X \in D_1^1$, то

$$q(X) = (a \pm b)X + (c \mp d)JX, \quad q(JX) = (c \pm d)X + (a \mp b)JX.$$

В частности, $\dim \text{Orb} X = 2$,

$$(q) = \begin{bmatrix} a \pm b & c \pm d \\ c \mp d & a \mp b \end{bmatrix}.$$

Таким образом, орбита элемента $X \in V$ двумерна тогда и только тогда, когда X – собственный вектор чисто мнимого α -кватерниона I . В этом случае $X \in \ker(\text{id} + I)$ либо $X \in \ker(\text{id} - I)$, т. е. $X \in \ker q$, $|q| = 0$. Обратно, пусть $X \in \ker q$, $|q| = 0$. Имеем: $q = a + b\bar{q}$; $a, b \in \mathbb{R}$, $\bar{q}$ – чисто мнимый α -кватернион. Тогда $q(X) = 0$, т. е. $\bar{q}(X) = -\frac{a}{b}X$; $-\frac{a}{b} = \pm 1$, и, значит, X – собственный вектор чисто мнимого α -кватерниона $\bar{q}$. Доказана

Теорема 2. Размерность орбиты линейного представления алгебры α -кватернионов равна 2 либо 4. При этом она равна 2 тогда и только тогда, когда она имеет ненулевое пересечение с ядром изотропного α -кватерниона.

По аналогии с эрмитовой геометрией четырехмерные орбиты линейного представления алгебры α -кватернионов следует называть голоморфными подпространствами. Из сказанного видно, что двумерные орбиты этого представления естественно назвать (вещественными) спинорными подпространствами, или спинорными плоскостями.

Поступила в редакцию 03.12.91.