

УДК 530.12:531.51

Е. Г. АБАКУМОВ, Е. А. УШАКОВ

МЕТОД ДВИЖЕНИЙ, АССОЦИИРОВАННЫХ С ЦИКЛОМ, КАК ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

1. В общей теории относительности (ОТО) гравитация моделируется кривизной пространства-времени, поэтому для описания гравитации фундаментальную роль играет концепция движения, ассоциированного с циклом в смысле Э. Картана [1]. В этом аспекте эффекты ОТО суть движения, ассоциированные с циклом.

Движение вектора, ассоциированное с циклом, определяется кривизной пространства-времени и может быть выражено через неинтегрируемый фазовый фактор, характерный для калибровочных теорий [2]. В связи с этим область применимости движений, ассоциированных с циклом, резко расширяется, поскольку любая калибровочная теория, сформулированная в терминах расслоенных пространств в путезависимом формализме, допускает аналогичные построения.

В данной работе в рамках теории возмущений иллюстрируется метод движений, ассоциированных с циклом, в применении к задаче геодезической прецессии в поле Шварцшильда. Выбор этой задачи обусловлен наличием точного ее решения в ОТО и возможностью исследования сходимости ряда построенной нами теории возмущений к точному решению. Появляется возможность проанализировать результаты не только первого порядка по μ/g , которые обычно и составляют наблюдаемые эффекты ОТО, но и более высокого порядка.

Геодезическая прецессия в поле Шварцшильда и Нордстрема – Рейснера как движение, ассоциированное с циклом, впервые рассматривалась в [3,4] в расслоенном пространстве-времени без использования уравнений Эйнштейна. В этой работе мы применим метод движений, ассоциированных с циклом, в рамках ОТО.

Движение вектора, ассоциированное с циклом, может быть задано в виде:

$$A^i = \bar{P} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_C \{ R_{jk}^i dx^k \wedge dx^j \} A_0^i \right\}, \quad (1)$$

где $\Delta A^i = A^i - A_0^i$ – изменение вектора A^i после параллельного переноса вдоль кривой, ограничивающей поверхность S ; A_0^i – невозмущенное (начальное) значение вектора A^i ; R_{jk}^i – тензор кривизны, являющийся оператором возмущения; \bar{P} означает упорядоченную экспоненту от двухмерного интеграла.

2. Явление изменения направления вектора при его параллельном переносе вдоль кругового решения задачи Шварцшильда носит название геодезической прецессии. Этот эффект может быть непосредственно проверен с помощью гироскопа на искусственном спутнике.

В поле Шварцшильда рассмотрим параллельное перенесение вектора S^i по круговой геодезической в экваториальной плоскости ($\theta = 0$). Для метрики Шварцшильда

$$ds^2 = e^{\nu} c^2 dt^2 - e^{-\nu} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \cos^2 \theta d\varphi^2), \quad (2)$$

где

$$e^{\lambda} = 1 - \frac{2\mu}{r}; \quad \mu = \frac{GM}{c^2}, \quad (3)$$

и символы Кристоффеля

$$\Gamma_{11}^1 = -\frac{\lambda'}{2}; \quad \Gamma_{22}^1 = -re^{\lambda}; \quad \Gamma_{33}^1 = -re^{\lambda}\cos^2\theta; \quad (4)$$

$$\Gamma_{44}^1 = -\frac{\lambda'}{2}e^{2\lambda}; \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r}; \quad \Gamma_{33}^2 = \cos\theta\sin\theta;$$

$$\Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}; \quad \Gamma_{23}^3 = -\operatorname{tg}\theta; \quad \Gamma_{14}^4 = \frac{\lambda'}{2};$$

$$\lambda' = \frac{d\lambda}{dr} = e^{-\lambda} \left(\frac{d}{dr} e^{\lambda} \right) = e^{-\lambda} \frac{2\mu}{r^2}.$$

Следует ожидать, что вклад в прецессию S^1 дает как кривизна собственно пространства, так и неевклидова связь пространства и времени. В обычной полярной системе координат это проследить полностью не удастся, поэтому особенно удачной следует считать систему координат де Ситтера [5]. Полагая

$$\varphi = \omega t + \psi, \quad (5)$$

переходим от координат $x^i = (r, \theta, \varphi, t)$ к координатам $x^i = (r, \theta, \psi, \tau)$.

Изменение вектора в новой системе координат связано с изменением в старой обычным образом:

$$\Delta S^i = A_j^i \Delta S^j, \quad A_j^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^j}. \quad (6)$$

В качестве начального состояния вектора выбирается $S_0 = (1, 0, 0, 0)$, а в качестве плоскости движения плоскость $dx^3 dx^1$. В этом случае, в силу (1), допустимым является интегрирование только по базису $dx^3 \wedge dx^1$ и задействуется компонента тензора кривизны R^1_{131} . Но так как в данной задаче имеется связь $dx^4 = \frac{c}{\omega_0} dx^3$, то неизбежно срабатывает компонента R^4_{141} .

Из этих компонент в поле Шварцшильда отличными от нуля являются только R^3_{131} и R^4_{141} :

$$R^3_{131} \approx \frac{\mu}{r^3}, \quad R^4_{141} \approx \frac{2\mu}{r^3}. \quad (7)$$

Поэтому только S^3 и S^4 подвергаются изменению под действием возмущения гравитацией.

В системе координат де Ситтера геодезическая прецессия представляется в виде изменения только одной компоненты:

$$\Delta S^3 = \Delta S^3 - \frac{\omega_0}{c} \Delta S^4. \quad (8)$$

Согласно методу движений, ассоциированных с циклом,

$$\Delta S^3 = -\frac{1}{2} \int \int R^3_{131} S_0^1 dx^3 \wedge dx^1 = \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} R^3_{131} dr d\varphi = \quad (9)$$

$$= -2\pi\mu \int_0^{r_0} \frac{dr}{r^3} = \frac{\pi\mu}{r_0^2}, \quad \int_0^{r_0} = -\int_{r_0}^{\infty}.$$

Аналогично

$$\Delta S^4 = -\frac{1}{2} \int \int R^4_{141} S_0^1 dx^4 \wedge dx^1 = \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} R^4_{141} dr d\varphi \frac{c}{\omega_0} = \quad (10)$$

$$= \frac{4\pi\mu c}{\omega_0} \int_0^{r_0} \frac{dr}{r^3} = -\frac{2\pi\mu}{r_0^2} \frac{c}{\omega_0}, \quad \int_0^{r_0} = -\int_{r_0}^{\infty}.$$

При вычислении интегралов (9) и (10) получаем расходимость на

нижнем пределе. Для ее устранения проводим процедуру перенормировки, состоящую из устранения расходимости на основе некоторых ясных физических соображений.

Так как поле Шварцшильда асимптотически плоское, то при переносе вектора по круговой орбите бесконечно большого радиуса он не испытывает дополнительного изменения, т. е. частица на орбите $r_0 \rightarrow \infty$ не возмущается гравитацией и своего состояния не изменяет. Например, в (9) должно выполняться

$$\int_0^{\infty} R_{131}^3 dr = 0. \quad (11)$$

Поэтому из очевидного равенства

$$\int_0^{\infty} = \int_0^{r_0} + \int_{r_0}^{\infty} = 0$$

вводим правило устранения расходимости:

$$\int_0^{r_0} = - \int_{r_0}^{\infty}. \quad (12)$$

Подставляя в (8) значения (9) и (10), получаем

$$\Delta S^{3'} = \frac{\pi\mu}{r_0^2} + \frac{\omega_0}{c} \left(\frac{c}{\omega_0} \frac{2\pi\mu}{r_0^2} \right) = \frac{3\pi\mu}{r_0^2}. \quad (13)$$

Однако измеримой величиной является не сама $\Delta S^{3'}$, а ее физическая компонента

$$\Delta \bar{S}^3 = \sqrt{g_{33}} / r = r_0 \Delta S^{3'}. \quad (14)$$

В приближении, доступном измерению, получаем следующий угол геодезической прецессии:

$$\delta = \Delta \bar{S}^3 \approx r_0 \Delta S^{3'} = \frac{3\pi\mu}{r_0}. \quad (15)$$

Рассмотренная задача имеет точное решение [5]:

$$\bar{S}^1 = \cos \left[\omega_0 \left(1 - \frac{3\mu}{2r_0} \right) (t - t_0) \right], \quad (16)$$

$$\bar{S}^3 = - \sin \left[\omega_0 \left(1 - \frac{3\mu}{2r_0} \right) (t - t_0) \right],$$

где ω_0 – угловая скорость невозмущенного движения. Зная решение (16), можно сравнить сходимость к нему решения приближенного, полученного методом движений, ассоциированных с циклом, в рамках теории возмущений.

В (15) вычислен только первый член из (1). Рассмотрим второй. В первом порядке компонента S^1 изменяться не может, так как $R_{131}^1 = R_{141}^1 = 0$. Однако в процессе движения появляется $S^3 \neq 0$, $S^4 \neq 0$ и через R_{313}^1 , R_{414}^1 «включается» обратная связь и подвергается изменению компонента S^1 :

$$\Delta \bar{S}^1 \approx \Delta S^{1'} = \Delta S^1 = \frac{1}{8} \left\{ \int R_{313}^1 dx^3 \wedge dx^1 \right\} \int R_{131}^3 dx^3 \wedge dx^1 + \quad (17)$$

$$+ \frac{c^2}{\omega_0^2} \left\{ \int R_{441}^1 dx^3 \wedge dx^1 \right\} \int R_{141}^4 dx^3 \wedge dx^1 \} S_0^1 \approx - \frac{\delta^2}{2}.$$

Для получения этого результата требуется дополнительная перенормировка, обусловленная сохранением нормы вектора. Но точно такой же результат получается из (16) в приближении малых углов:

$$\cos \delta \approx 1 - \frac{\delta^2}{2}. \quad (18)$$

Итак, срабатывает не только первый, но и второй порядок метода движений, ассоциированных с циклом, как теории возмущений.

Для оценки порядка величин приведем данные расчета в первом приближении теории возмущений (т. е. согласно (15)). Геодезическая прецессия для Земли составляет $0'', 019$ в год. Для спутника, скользящего по поверхности Земли, угол прецессии равен $8'', 5$ в год.

Список литературы

1. Cartan E. // L'enseignement mathematique. 1924—1925. Т.24. № 1. С. 5.
2. Ушаков Е. А. // Гравитация и электромагнетизм. 1988. С. 242.
3. Там же. 1981. С. 109.
4. Ushakov E. A., Timoshchenko A. I. // Abstracts of Contributed Papers 9 th Intern. Conf. on General Rel. and Grav. Jena, 1980. V. 1. P. 218.
5. Брумберг В. А. Релятивистская небесная механика. М., 1972. С. 191.

Поступила в редакцию 28.09.92

УДК 621.373

Л. И. БУРОВ, А. В. ЖВАЛЕВСКИЙ, А. П. КЛИЩЕНКО,
И. Н. КОЗЛОВ, А. П. ЛИСТОПАД

ОСОБЕННОСТИ ОКОЛОПОРОВОЙ ГЕНЕРАЦИИ РАСТВОРОВ КРАСИТЕЛЕЙ ПРИ ПОЛЯРИЗОВАННОЙ НАКАЧКЕ

Одна из возможностей управления энергетическими и поляризационными характеристиками излучения лазеров на растворах красителей основана на вариации состояния поляризации излучения накачки в ее продольном и поперечном вариантах. Этой проблеме посвящено достаточно большое количество работ [напр., 1—3], однако подавляющее большинство из них связано с использованием мощной накачки, причем интерпретация результатов проводилась в приближении модели тонкого оптического слоя. Последнее условие выполняется далеко не всегда и тогда эффекты, связанные с распространением излучения в нелинейной среде, могут существенным образом влиять на поляризацию, как это имеет место, например, для газовых лазеров [4]. Кроме того, по мнению авторов, более тонкого осмысления требует и сам процесс генерации поляризованного излучения в растворах сложных молекул. В этом случае целесообразным представляется вести исследование в области околопороговых мощностей накачки, сводя к минимуму влияние эффектов насыщения. В данной работе сделана попытка ответить на поставленные вопросы на основе исследований генерации жестких растворов красителей для случаев продольного и поперечного вариантов поляризованной накачки.

Для экспериментальных исследований были использованы этанольный и глицериновый растворы родамина 6G различных концентраций в лазере с изотропным резонатором. В качестве резонатора служила прямоугольная кювета из плавленого кварца. Мощность генерации и поляризации излучения лазера на красителе измерялась на установке, схема которой приведена на рис. 1. Накачка осуществлялась поляризованными импульсами длительностью 30 нс, следующими с частотой 12,5 Гц и длиной волны $\lambda = 532$ нм. Поляризация накачки варьировалась от линейной до круговой с помощью пластинки $\lambda/4$. Степень поляризации излучения генерации лазера на красителе определялась при последовательном измерении максимальной и минимальной составляющих мощности генерации измерителем мощности ИМО-2Н. Степень эллиптичности излучения лазера анализировалась пла-

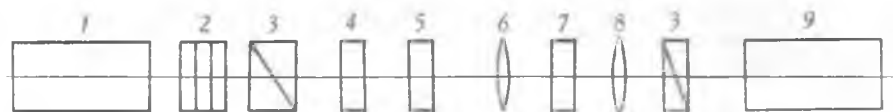


Рис. 1. Схема экспериментальной установки:

1—лазер ЛТИ-401; 2—ослабляющие фильтры; 3—поляризатор; 4—фазовая пластинка; 5—фазовая пластинка; 6, 7—кюветы с красителем; 8—собирающие линзы; 9—измеритель мощности лазерного излучения ИМО-2Н