

ЗАДАЧА О ВДАВЛИВАНИИ ГЛАДКОГО ШТАМПА И СИСТЕМЫ ГЛАДКИХ ШТАМПОВ В УПРУГУЮ ПОЛОСУ

Рассмотрим задачу о вдавливании в полосу одного штампа. Известно, что напряженное состояние в плоской задаче теории упругости описывается с помощью комплексного потенциала $\Phi(z)$ формулами Колосова—Мусхелишвили:

$$\sigma_x + \sigma_y = 2(\Phi(z) + \overline{\Phi(\bar{z})}), \quad (1)$$

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = \Phi(z) - \Phi(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)},$$

$$2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \kappa\Phi(z) + \Phi(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \quad (2)$$

где $\Phi(z)$ — кусочно-голоморфная функция, определенная в областях $S^- = \{z \in \mathbb{C} | -h < \text{Im} z < 0\}$ и $S^+ = \{z \in \mathbb{C} | 0 < \text{Im} z < h\}$; μ и κ — известные постоянные; σ_x , τ_y и τ_{xy} — компоненты тензора напряжений; u и v — компоненты вектора смещений.

Рассмотрим полосу $-h \leq \text{Im} z \leq 0$, лежащую на жестком основании. Пусть на участке $-a \leq \text{Re} z \leq a$, $\text{Im} z = 0$ в полосу вдавлен штамп с плоской подошвой (рис. 1, а), и пусть трение на участке контакта отсутствует. Внешняя нагрузка на остальной части полосы также отсутствует.

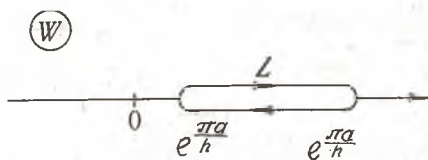
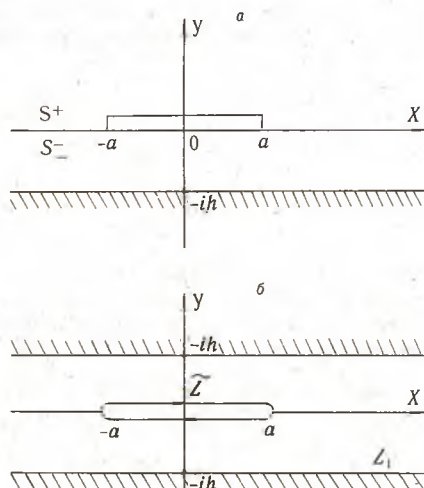


Рис. 1, а, б,

Рис. 2

На основании формулы (2), учитывая условие задачи $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$ при $|x| > a$ и $\tau_{xy} = 0$, $v = \text{const}$ при $|x| < a$, получаем, что функция $\Phi(z)$ должна удовлетворять условиям:

$$\Phi^-(x) - \Phi^+(x) = 0, |x| > a,$$

$$\text{Im}(\Phi^-(x) - \Phi^+(x)) = 0, |x| < a, \quad (3)$$

$$\text{Im}(\kappa\Phi^-(x) + \Phi^+(x)) = 0, |x| < a.$$

Рассмотрим полосу шириной $2h$ (рис. 1, б). Тогда первое из уравнений (3) означает, что функции $\Phi^+(x)$ и $\Phi^-(x)$ являются аналитическим продолжением друг друга. Из двух других уравнений (3) следует, что

$$\text{Im} \Phi(t) = 0, t \in \tilde{L}, \quad (4)$$

где $\tilde{L}$ — замкнутая кривая, изображенная на рис. 1, б. Будем считать, что функция Φ ограничена на бесконечности и имеет интегрируемые особенно-

сти в точках $\pm a$. Граничные условия на краю полосы не заданы. Потребуем, чтобы там функция Φ удовлетворяла условию периодичности:

$$\Phi(t) = \Phi(t + 2ih), t \in L_1. \quad (5)$$

Приступим к решению красной задачи (4), (5). Сведем задачу для полосы с разрезом к задаче для плоскости с разрезом (рис. 2). Для этого отображим

полосу на плоскость с помощью функции $w = e^{\frac{\pi z}{h}}$. Для плоскости w с разрезом будем решать задачу $\text{Im} F'(w) = 0$, $w \in L$, где функция $F(w)$ ограничена на

бесконечности и имеет интегрируемые особенности в точках $e^{\pm \frac{\pi a}{h}}$. Наиболее общий вид функций, которые удовлетворяют всем указанным условиям, будет следующим:

$$F(w) = \frac{\alpha w + \beta}{\sqrt{\left(e^{\frac{\pi a}{h}} - w \right) \left(w - e^{-\frac{\pi a}{h}} \right)}},$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ — произвольные константы. Решением же исходной задачи (4), (5) будет функция $\Phi(z) = F(w)$, т. е.

$$\Phi(z) = \frac{\alpha e^{\frac{\pi z}{h}} + \beta}{\sqrt{\left(e^{\frac{\pi a}{h}} - e^{\frac{\pi z}{h}} \right) \left(e^{\frac{\pi z}{h}} - e^{-\frac{\pi a}{h}} \right)}}. \quad (6)$$

В более общем случае, когда вдавливание происходит на отрезке $[a, b]$, общее решение задачи будет иметь вид:

$$\Phi(z) = \frac{\alpha e^{\frac{\pi z}{h}} + \beta}{\sqrt{\left(e^{\frac{\pi a}{h}} - e^{\frac{\pi z}{h}} \right) \left(e^{\frac{\pi b}{h}} - e^{\frac{\pi z}{h}} \right)}}. \quad (7)$$

И, наконец, наиболее общий случай вдавливания в полосу системы n гладких штампов. Пусть $[a_k, b_k]$, $k = \overline{1, n}$ — отрезки, определяющие области контакта штампов с полосой, причем $-\infty < a_1 < b_1 < \dots < a_n < b_n < +\infty$. Аналогично рассмотренному выше задаче для полосы с разрезами сводится к задаче для плоскости с разрезами, лежащими на вещественной оси. Общее решение задачи дается формулой:

$$F(w) = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 w + \alpha_2 w^2 + \dots + \alpha_n w^n}{\sqrt{(-1)^{n-1} \prod_{k=1}^n \left(w - e^{\frac{\pi a_k}{n}} \right) \left(e^{\frac{\pi b_k}{n}} - w \right)}},$$

где $\alpha_k \in \mathbb{R}$, $k = \overline{0, n}$ — произвольные постоянные. Решение исходной задачи для полосы с разрезами будет следующим:

$$\Phi(z) = \frac{\sum_{k=0}^n \alpha_k e^{\frac{\pi z}{h} k}}{\sqrt{(-1)^{n-1} \prod_{k=1}^n \left(e^{\frac{\pi a_k}{h}} - e^{\frac{\pi z}{h}} \right) \left(e^{\frac{\pi b_k}{h}} - e^{\frac{\pi z}{h}} \right)}}. \quad (8)$$