Явление вязкости усложняет температурные деформации петли и приводит к ее частотной зависимости. Известно, что в случае гистерезиса, обусловленного сегнетоэлектричеством, наклон эллипса поляризации слабо зависит от амплитуды и при сколь угодно малой частоте эллиптичность кривой поляризации не вырождается в прямую линию. Изменения напряженности поля в пределах от 0,2 до 5 кВ/м, приложенного к образцам $Fe_{3-x}Cr_xO_4$ с $x = 1{,}4$ и 1,6 как при комнатной температуре, так и при 360 K, где ϵ' принимает максимальное значение, не влияют на наклон эллипса поляризации. Второй признак сегнетоэлектричества —сохранение эллиптичности кривой при низких частотах—также имеется в исследуемых образцах. Зависимость $\epsilon'_{мгн}(T)$, полученная из параметров петли гистерезиса (2), на начальном участке роста проницаемости с точностью до постоянного множителя примерно повторяет ход $\epsilon'(T)$, установленный из мостовых измерений, фиксирующих только емкостную составляющую импеданса. Отсутствие максимума на кривой $\epsilon'_{мгн}(T)$ связано с тем, что осциллографический метод реагирует и на индуктивную часть импеданса, которая особенно велика в области $T \geq 450$ K [2].

Описанные свойства поляризации феррохромовых шпинелей характерны для невысоких частот порядка 1 кГц и менее. При увеличении частоты выше этого предела в поведении эллипса поляризации в зависимости от частоты и температуры начинают сказываться индуктивные свойства образцов. Наклон эллипса приобретает обратный знак, т. е. максимальное значение D оказывается во втором квадранте. Поворот эллипса поляризации против часовой стрелки характерен для схемы с большой индуктивностью, подключенной вместо исследуемого образца. Обращение знака импеданса исследуемых образцов, полученное мостовыми методами на частоте измерения 1 кГц при нагревании выше 500 K, из емкостного на индуктивный [2] свидетельствует в пользу предположения о том, что деформации петли диэлектрического гистерезиса при нагревании вызваны сначала преимущественно зависимостью от температуры сегнетоэлектрической составляющей диэлектрической поляризации, а затем на фазовый угол и величину амплитуды начинает влиять индуктивность L исследуемых образцов. Наличие L порядка нескольких миллигенри в образцах, лишенных каких-либо обмоток, может быть или результатом резонансного поведения диэлектрической проницаемости с переходом ϵ' в область отрицательных значений, или же связано с особенностями движения носителей тока в спиралевидных магнитных структурах, образуемых за счет ионов хрома. Ответ на эти вопросы требует тщательных исследований магнитной и кристаллической структур изучаемых объектов.

Список литературы

1. Белов К. П., Горяга А. М., Шереметьев В. Н.//ФТТ. 1986. Т. 30. Вып. 1. С. 314.
2. Данилькевич М. И., Д. Аль-Шарр, П. Сапаси//Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1991. № 4. С. 65.
3. Данилькевич М. И., Д. Аль-Шарр//Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1: Физ. Мат. Мех. 1991. № 2. С. 28.

Поступила в редакцию 28.11.91.

УДК 535.42

А. М. БЕЛЬСКИЙ

НЕДИФРАГИРУЮЩИЕ ПУЧКИ И ЭФФЕКТ ТАЛЬБОТА

Работы [1—2] привлекли внимание к любопытным решениям уравнения Гельмгольца

$$\Delta U + k^2 U = 0, \qquad (1)$$

недифрагирующим пучкам, т. е. волновым полям, удовлетворяющим условию:

$$|U(x, y, z)| = |U(x, y, 0)|. \qquad (2)$$

Ось z называют осью пучка. Пучки, удовлетворяющие условию (2), имеют одинаковое распределение интенсивности в любом поперечном сечении $z = \mathrm{const}$.

В данном сообщении показано, что можно ввести более широкий класс решений уравнения (1), также обладающих в некотором смысле «бездифракционным» характером, так что пучки, удовлетворяющие условию (2), будут представлять частный случай таких решений.

Общее решение уравнения (1) при условии (2) легко получить, используя представление любого волнового пучка в виде углового спектра плоских волн:

$$U(x, y, z) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} F(p, q)\, l^{ik(px+qy+mz)}\, dpdq, \tag{3}$$

где (p, q, m)—проекции вектора волновой нормали $(p^2+q^2+m^2=1)$; $F(p, q)$—функция углового спектра, имеющая смысл фурье-образа поля $U(x, y, 0)$.

Для того чтобы (3) удовлетворяло (2), необходимо, чтобы величина m сохраняла постоянное значение при изменении p и q, т. е., чтобы угловой спектр пучка (3) состоял только из плоских волн, имеющих одинаковые проекции волновой нормали на ось пучка (ось z) [3]. Этому условию можно удовлетворить, положив

$$F(p, q) = \left(\frac{2\pi}{k}\right)^2 F_\rho(\beta)\,\delta(\rho-\rho_0), \tag{4}$$

где $p = \rho\cos\beta$, $q = \rho\sin\beta$; $F_\rho(\beta)$—произвольная функция.

Подставляя (4) в (3), для поля произвольного недифрагирующего пучка в цилиндрической системе координат получим:

$$U\rho(r,\varphi,z) = \frac{1}{2\pi} l^{ikmz} \int_0^{2\pi} F\rho(\beta)\, l^{ikr\rho\cos(\beta-\varphi)}\, d\beta. \tag{5}$$

В частности, если $F\rho(\beta) = \sum\limits_{s=i}^{N} A_s \delta(\beta-\beta_s)$, то недифрагирующий пучок (5) представляет собой суперпозицию N плоских волн, волновые нормали которых образуют угол $\theta = \arccos(m)$ с осью z. Если же положить $F\rho(\beta) \equiv 1$, из (5) получим так называемый бесселев пучок

$$U\rho(r, z) = J_0(kr\rho)\, l^{ikmz}, \tag{6}$$

свойства которого хорошо изучены [1—2].

Ослабим несколько условие (2), заменив его условием

$$|U(x, y, z_0)| = |U(x, y, 0)|, \tag{7}$$

т. е. потребуем, чтобы исходное распределение интенсивности воспроизводилось в плоскости $z = z_0$, не накладывая никаких требований на распределение интенсивности в промежуточных поперечных сечениях $0 < z < z_0$.

Для нахождения решений уравнения (1), удовлетворяющего условию (7), воспользуемся недифрагирующими пучками (5) и положим, что искомое решение можно представить суперпозицией

$$U(r, \varphi, z) = \int_0^1 U\rho(r, \varphi, z)\, d\rho. \tag{8}$$

Из (5), (7) и (8) получаем, что

$$F\rho(\beta) = \sum_s F_s(\beta)\,\delta(\rho-\rho_s), \tag{9}$$

где ρ_s—корни уравнения

$$kz_0\left(1-\rho_s^2\right)^{1/2} = km_0 z_0 + 2\pi s, \quad s = 0, \pm1, \ldots \tag{10}$$

$0 \le m_0 \le 1$—произвольная действительная постоянная.

Окончательно, используя (9) и (5), получаем:

$$U(r, \varphi, z) = l^{ikm_0 z} \sum_s l^{i2\pi s\frac{z}{z_0}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_s(\beta)\, l^{ikr\rho_s\cos(\beta-\varphi)}\, d\beta. \tag{11}$$

По условию, $0 \le \rho_s \le 1$ и $\left(1-\rho_s^2\right)^{1/2} \ge 0$; следовательно, уравнение (10) имеет конечное число решений:

$$\rho_s = [1 - (m_0 + s\frac{\lambda}{z_0})^2]^{1/2}, \qquad (12)$$

где целое число s может изменяться в пределах

$$-m_0 \frac{z_0}{\lambda} \leq s \leq (1 - m_0)\frac{z_0}{\lambda}. \qquad (13)$$

Таким образом, любой пучок, удовлетворяющий условию (7) (такие пучки мы будем называть самовоспроизводящимися или пучками с продольной периодичностью), можно представить в виде суперпозиции конечного числа недифрагирующих пучков. Максимальное число S слагаемых в такой суперпозиции не зависит от постоянной m_0 и равно $S = [z_0/\lambda]$, где $[x]$—целая часть числа x.

Из (11) следует, что $U(r, \varphi, nz_0) = U(r, \varphi, 0)$, $n = 0, 1, 2$ ..., т. е. если пучок воспроизводится в плоскости $z = z_0$, он будет самовоспроизводиться периодически с продольным периодом z_0. Если $m_0 \neq 0$, восстановление поля осуществляется с точностью до фазового множителя $\exp(ikm_0nz_0)$. Таким пучкам также присуще своего рода свойство «бездифракционности», поскольку начальное распределение интенсивности периодически восстанавливается.

Следовательно, если в плоскости $z = 0$ создано распределение поля

$$U(r, \varphi, 0) = \frac{1}{2\pi} \sum_s \int_0^{2\pi} F_s(\beta) l^{ikr\rho_s \cos(\beta - \varphi)} d\beta, \qquad (14)$$

оно будет саморепродуцироваться; структура этих распределений определяется S произвольными функциями $F_s(\beta)$. В частности, если все F_s, за исключением одной, тождественно равны нулю, мы получаем бездифракционные пучки, которые самовоспроизводятся в любой плоскости $z = \text{const}$. Если же положить

$$F_s(\beta) = \pi A_s [\delta(\beta) + \delta(\beta - \pi)],$$

из (14) получим:

$$U(x, y, 0) = \sum_s A_s \cos(k\rho_s x), \qquad (15)$$

т. е. одномерные, симметричные относительно x структуры.

Пучки с продольной периодичностью тесно связаны с известным в оптике эффектом Тальбота (см. напр., [4—5])—саморепродуцированием дифракционных решеток при их когерентном освещении.

Действительно, если ограничиться параксиальным приближением, из (12) для $m_0 = 0$, $z_0 \gg \lambda$ приближенно получим $\rho_s \approx (-2\lambda s/z_0)^{1/2}$. Полагая, что $A_s \neq 0$, только если $s = -q^2$, из (15) получим:

$$U(x,y,0) = \sum_q A_q \cos[kqx(\frac{2\lambda}{z_0})^{1/2}]. \qquad (16)$$

Формула (16) представляет собой разложение в ряд Фурье периодической четной функции с периодом $d = (\lambda z_0/2)^{1/2}$. Другими словами, любая одномерная решетка с периодом d будет в параксиальном приближении саморепродуцироваться на расстоянии $z_0 = 2d^2/\lambda$, что совпадает с формулой Релея для эффекта Тальбота.

Список литературы

1. Durnin J., Miceli J. J., Eberly J. H. // Phys. Rev. Lett. 1987. V. 58. № 15. P. 1499.
2. Durnin J.//Journ. Opt. Soc. Am. 1987. V. 4 A. № 4. P. 651.
3. Ананьев Ю. А.//Оптика и спектроскопия. 1988. Т. 64. № 6. С. 1211.
4. Montgomery W. D.//Journ. Opt. Soc. Am. 1967. V. 57. № 6. P. 772.
5. Lohmann A. W., Ojeda-Castaneda J., Streibl N.//Optika Acta. 1983. V. 30. № 9. P. 1259.

Поступила в редакцию 11.06.92.