Замыкание операторов $F_\alpha^{(i)}$ будем обозначать теми же символами. Из формул (13), (14), (19) и (20) следует, что значения $F_\alpha^{(i)}$ u операторов $F_\alpha^{(i)}$ определяются для каждого $u \in L_2(\Omega)$ этими же формулами. Таким образом, $F_\alpha^{(i)}$ определены на всем пространстве $L_2(\Omega)$, понимая под $F_\alpha^{(i)}$ замыкание исходных операторов. Путем предельного перехода неравенство (21) можно распространить на любую функцию $u \in L_2(\Omega)$, т. е. справедливо следующее утверждение.

J—11. Для любых $u \in L_2(\Omega)$, $a \in C^{|\alpha|}(\bar{\Omega})$ и $k \in N$ можно так выбрать числа $\delta_{mk} = \delta_{mk}(u)$, что

$$\| F_\alpha^{(i)} u \|_{L_2(\Omega)} \leq \frac{1}{k} \| J_k u, J_k^* u \|_{H^{|\alpha|-1}(\Omega)}, \quad i = 1, \ldots, 4. \tag{21'}$$

Здесь в (21′) производные от $J_k u$ и $J^*_k u$ для $u \in L_2(\Omega)$ понимаются как значения замкнутых операторов, получаемых в результате замыкания соответствующих операторов с областью определения $H^{|\alpha|}(\Omega)$.

Обозначим через $P_r(x, D)$ дифференциальный полином $P_r(x, D) = \sum_{|\alpha|<r} b_\alpha(x) D^\alpha$ порядка r, $r \geq 1$.

Рассмотрим по аналогии с $F_\alpha^{(i)}$ коммутаторы

$$[P_r, J_k] = P_r J_k - J_k P_r, \quad [P_r, J_k^*] = P_r J_k^* - J_k^* P_r$$

оператора P_r с операторами осреднения J_k и J^*_k. На основании неравенства (21′) можно сделать следующее утверждение.

J—12. Для любых $u \in L_2(\Omega)$, $b_\alpha \in C^{|\alpha|}(\bar{\Omega})$ и $k \in N$ можно выбрать так числа $\delta_{mk} = \delta_{mk}(u)$, что

$$\| [P_r, J_k] u, [P_r, J_k^*] u \|_{L_2(\Omega)} \leq \frac{1}{k} \| J_k u, J_k^* u \| H^{r-1}(\Omega).$$

Список литературы

1. Буренков В. И. // ТР. МИАН СССР. 1974. Т. 131. С. 39.
2. Burenkov V. I. // Nonlinear analysis, function spaces and applications. Leipzig, 1982. V. 2. P. 5. (Teubner—Texte Math., Bd. 49).
3. Корзюк В. И. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1992. № 2. С. 49.

Поступила в редакцию 14.04.92.

УДК 519.24

Л. А. ХАТКЕВИЧ

СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МОДИФИЦИРОВАННОЙ ОЦЕНКИ КОВАРИАЦИОННОЙ ФУНКЦИИ

Рассмотрим стационарный случайный процесс $X(t)$, $t \in Z = \{1, 2, \ldots\}$. Пусть $MX(t) = 0$, $R(\tau) = M\{X(t)X(t+\tau)\}$, $t, \tau \in Z$—неизвестная ковариационная функция, $X(1), X(2), \ldots, X(T)$—наблюдения над случайным процессом $X(t)$, $t \in Z$.

Введем функцию $h(u)$—окно просмотра данных, удовлетворяющую условию А). $h(u)$, $u \in R$ ограничена, имеет ограниченную вариацию, $h(u) = 0$ при $u \notin (0,1]$.

Пусть

$$H_k^{(T)} = \sum_{t=1}^{T} h^k\left(\frac{t}{T}\right), \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{1}$$

В качестве оценки ковариационной функции $R(\tau)$ рассмотрим статистику:

$$\hat{R}_h^{(T)}(\tau) = \frac{1}{H_2^{(T)}} \sum_{t=1}^{T-\tau} h\left(\frac{t}{T}\right) h\left(\frac{t+\tau}{T}\right) X(t) X(t+\tau). \tag{2}$$

В частном случае, когда

$$h(u)=\begin{cases}1 \text{ при } 0<u\le 1,\\ 0 \text{ при остальных } u,\end{cases}$$

(3)

свойства оценки (2) исследовались во многих работах, например, в [1]. Нами получены асимптотические выражения для совместных кумулянтов оценок $\hat{R}_h^{(1)}(\tau)$ и доказана асимптотическая нормальность этих оценок при некоторых дополнительных условиях на кумулянты случайного процесса $X(t)$.

Для упрощения дальнейшего изложения введем в рассмотрение функцию

$$h^{(T)}(t)=h\left(\frac{t}{T}\right), \tag{4}$$

вместо $\hat{R}_h^{(T)}(\tau)$ будем использовать обозначение $\hat{R}^{(T)}(\tau)$.

Лемма 1. Если функция $h(u)$ удовлетворяет условию A), то

$$\left|\sum_t h^{(T)}(t+u_1)\dots h^{(T)}(t+u_{k-1})h^{(T)}(t)-H_k^{(T)}\right|\le K(|u_1|+\dots+|u_{k-1}|)$$

при некотором конечном K.

Рассматриваемое утверждение—частный случай леммы из работы [3. С. 432].

Теорема 1. Пусть выполняется условие A) и $H^{(T)}(\tau)=\sum_{t=1}^{T-\tau}h\left(\frac{t}{T}\right)h\left(\frac{t+\tau}{T}\right)$. Тогда для оценки (2) справедливы соотношения

$$M\hat{R}^{(T)}(\tau)=\frac{H^{(T)}(\tau)}{H^{(\tau)}(0)}R(r),$$

$$M\hat{R}^{(T)}(\tau)=R(r)+0(T^{-1}).$$

Доказательство. Учитывая (2), используем свойства математического ожидания и определение ковариационной функции

$$M\hat{R}^{(T)}(\tau)=\frac{1}{M_2^{(T)}}\sum_{t=1}^{T-\tau}h\left(\frac{t}{T}\right)h\left(\frac{t+\tau}{T}\right)R(\tau)=\frac{H^{(T)}(\tau)}{H^{(T)}(0)}R(\tau).$$

Запишем смещение оценки $\hat{R}^{(T)}(\tau)$:

$$b^{(T)}(\tau)=M(\hat{R}^{(T)}(\tau)-R(\tau))=\frac{H^{(T)}(\tau)-H^{(T)}(0)}{H^{(T)}(0)}R(\tau).$$

По лемме 1, принимая во внимание (4),

$$|H^{(T)}(\tau)-H^{(T)}(0)|=\left|\sum_t h^{(T)}(\tau)h^{(T)}(t+\tau)-H^{(T)}(0)\right|\le K(\tau).$$

Так как при выполнении условия A) $H^{(T)}(0)\sim T\int_0^1 h^2(u)\,du$, то

$$|b^{(T)}(\tau)|\sim\frac{|H^{(T)}(\tau)-H^{(T)}(0)|}{T\int_0^1 h^2(u)\,du}|R(\tau)|.$$

Но выражение в правой части не превосходит $\frac{K|\tau||R(\tau)|}{T\int_0^1 h^2(u)\,du}$, откуда следует второе утверждение теоремы.

Введем необходимые в дальнейшем определения. Составим из множества пар чисел $\nu=\{(i,j),\ 1\le i\le k,\ 1\le j\le 2\}$ таблицу

$$\begin{matrix} (1,\ 1) & (1,\ 2) \\ \vdots & \vdots \\ (k,\ 1) & (k,\ 2). \end{matrix} \tag{5}$$

Назовем разбиение $\nu = \nu' \cup \nu''$ построчным, если для каждой строки таблицы (5) все ее элементы попадут либо в ν', либо в ν''. Набор непересекающихся множеств $\{\nu_1, \dots, \nu_p\}$, $\nu_l \subseteq \nu$, $l = 1, \dots, p$, $1 \le p \le 2k-1$ назовем неразложимым, если не существует построчного разбиения $\nu = \nu' \cup \nu''$ такого, что для любого $1 \le l \le p$ $\nu_l \subset \nu'$ либо $\nu_l \subset \nu''$.

Теорема 2. Пусть выполняется условие А) и для любого неразложимого разбиения $\nu = \nu_1 \cup \dots \cup \nu_p$ таблицы (5):

$$\sum_{u_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{u_{k-1}=-\infty}^{\infty} |\operatorname{cum}\{X(u_i + [\tfrac{j}{2}]\tau_i), (i,j) \in \nu_1\} \dots$$

$$\dots \operatorname{cum}\{X(u_i + [\tfrac{j}{2}]\tau_i), (i,j) \in \nu_p\}| < \infty, \tag{6}$$

где $\operatorname{cum}\{X(u_i + [\tfrac{j}{2}]\tau_i), (i,j) \in \nu_l\}$ —совместный кумулянт наблюдений случайного процесса $X(u_i + [\tfrac{j}{2}]\tau_i)$ с индексами $(i,j) \in \nu_l$, $l = 1, \dots, p$, $u_k = 0$, $[z]$—целая часть z. Тогда

$$T^{k-1} \operatorname{cum}\{\hat{R}^{(T)}(\tau_1), \dots, \hat{R}^{(T)}(\tau_k)\} =$$

$$= \int_0^1 h^{2k}(u)\,du \left(\int_0^1 h^2(u)\,du\right)^{-k} \sum_{u_1=1}^{T-\tau_1-1} \dots$$

$$\dots \sum_{u_{k-1}=1}^{T-\tau_{k-1}-1} \sum_{\nu} \operatorname{cum}\{X(u_i + [\tfrac{j}{2}]\tau_i), (i,j) \in \nu_1\} \dots$$

$$\dots \operatorname{cum}\{X(u_i + [\tfrac{j}{2}]\tau_i), (i,j) \in \nu_p\} + \epsilon_T, \tag{7}$$

где суммирование ведется по всем неразложимым разбиениям таблицы (5), $\epsilon_T \to 0$ при $T \to \infty$ равномерно по $\tau_1, \dots, \tau_k$.

Доказательство. На основании известных свойств кумулянтов

$$\operatorname{cum}\{\hat{R}^{T}(\tau_1), \dots, \hat{R}^{(T)}(\tau_k)\} = \frac{1}{(H_2^{(T)})^k} \sum_{t_1=1}^{T-\tau_1} \dots$$

$$\dots \sum_{t_k=1}^{T-\tau_k} h^{(T)}(t_1) h^{(T)}(t_1+\tau_1) \dots$$

$$h^{(T)}(t_k) h^{(T)}(t_k+\tau_k) \operatorname{cum}\{X(t_1)X(t_1+\tau_1), \dots, X(t_k)X(t_k+\tau_k)\}.$$

Для преобразования выражения введем новые индексы суммирования: $t := t_k$, $u_j = t_j - t_k$, $j = 1, \dots, k-1$:

$$\operatorname{cum}\{\hat{R}^{(T)}(\tau_1), \dots, \hat{R}^{(T)}(\tau_k)\} =$$

$$= \frac{1}{(H_2^{(T)})^k} \sum_{u_1=1-(T-\tau_k)}^{T-\tau_1-1} \dots \sum_{u_{k-1}=1-(T-\tau_k)}^{T-\tau_k-1} \sum_{t},$$

$$h^{(T)}(u_1+t) h^{(T)}(u_1+t+\tau_1) \dots$$

$$\dots h^{(T)}(u_{k-1}+t) h^{(T)}(u_{k-1}+t+\tau_{k-1}) h^{(T)}(t) h^{(T)}(t+\tau_k),$$

$$\operatorname{cum}\{X(u_1)X(u_1+\tau_1), \dots, X(u_{k-1})X(u_{k-1}+\tau_{k-1}),\ X(0)X(\tau_k)\}.$$

Применив лемму 1, получим:

$$\operatorname{cum}\{\hat R^{(T)}(\tau_1),\dots,\hat R^{(T)}(\tau_k)\}=$$

$$=\frac{H_{2k}^{(T)}}{(H_2^{(T)})^k}\sum_{u_1=1-(T-\tau_k)}^{T-\tau_1-1}\dots\sum_{u_{k-1}=1-(T-\tau_k)}^{T-\tau_k-1}\cdot$$

$$\operatorname{cum}\{X(u_1)X(u_1+\tau_1),\dots,X(u_{k-1})X(u_{k-1}+\tau_{k-1}),X(0)X(\tau_k)\}+$$

$$+\frac{\epsilon_T}{T^{k-1}},\tag{8}$$

где

$$\frac{\epsilon_T}{T^{k-1}}\le\frac{T^{k-1}}{(H_2^{(T)})^k}\sum_{u_1=-\infty}^{\infty}\dots\sum_{u_{k-1}=-\infty}^{\infty}K(|u_1|+\dots+|u_{k-1}|)\times$$

$$\times|\operatorname{cum}\{X(u_1)X(u_1+\tau_1),\dots,X(u_{k-1})X(u_{k-1}+\tau_{k-1}),X(0)X(\tau_k)\}|.\tag{9}$$

Кумулянты попарных произведений наблюдений процесса $X(t)$, согласно [3], можно представить в виде сумм произведений совместных кумулянтов

$$\operatorname{cum}\{X(u_1)X(u_1+\tau_1),\dots,X(u_{k-1})X(u_{k-1}+\tau_{k-1}),X(0)X(\tau_k)\}=$$

$$=\sum_{\nu}\operatorname{cum}\{X(u_i+[\tfrac{j}{2}]\tau_i),(i,j)\in\nu_1\}\dots\operatorname{cum}\{X(u_i+[\tfrac{j}{2}]\tau_i),(i,j)\in\nu_p\},\tag{10}$$

где суммирование производится по всем неразложимым разбиениям $\nu=\nu_1\cup\dots\cup\nu_p$ таблицы (5). Подставив (10) в (8) и заменив $H_2^{(T)}$ и $H_{2k}^{(T)}$ на эквивалентные величины

$$H_2^{(T)}\sim T\int_0^1 h^2(u)\,du,\quad H_{2k}^{(T)}\sim T\int_0^1 h^{2k}(u)\,du,$$

получим (6). Остаточный член ϵ_T с учетом (9) и (10) не превосходит величины, эквивалентной

$$T^{-1}\sum_{u_1-\infty}^{\infty}\dots\sum_{u_{k-1}=-\infty}^{\infty}(|u_1|+\dots+|u_{k-1}|)\times$$

$$\times|\operatorname{cum}\{X(u_i+[\tfrac{j}{2}]\tau_i),(i,j)\in\nu_1\}\dots\operatorname{cum}\{X(u_i+[\tfrac{j}{2}]\tau_i),(i,j)\in\nu_p\}|.$$

Так как $T^{-1}(|u_1|+\dots+|u_{k-1}|)\to 0$ при $T\to\infty$ и имеет место условие (6), то $\epsilon_T\to 0$ при $T\to\infty$, откуда следует утверждение теоремы.

Следствие. $T^{k-1}\operatorname{cum}\{\hat R_h^{(T)}(\tau_1),\dots,\hat R_h^{(T)}(\tau_k)\}$ достигает минимума по $h(.)$ в асимптотике при условии

$$\int_0^1 h^{2k}(u)\,du=\left(\int_0^1 h^2(u)\,du\right)^k.$$

Доказательство получаем, применив интегральное неравенство Гельдера:

$$\int_0^1 h^2(u)\,du\le\left(\int_0^1 h^{2k}(u)\,du\right)^{\frac{1}{k}}\left(\int_0^1 1.du\right)^{\frac{k-1}{k}}.$$

Отметим, что знак равенства имеет место, в частности, при $h(u)$, определяемом формулой (3).

Теорема 3. Пусть выполняется условие A) и для любого неразложимого разбиения $\nu=\nu_1\cup\ldots\cup\nu_p$ таблицы (4):

$$\sum_{u_1}\ldots\sum_{u_{k-1}}|u_l|\,|\mathrm{cum}\{X(u_i+[\tfrac{j}{2}]\tau_i),(i,j)\in\nu_1\}\ldots$$

$$\ldots|\mathrm{cum}\{X(u_i+[\tfrac{j}{2}]\tau_i),(i,j)\in\nu_p\}|<\infty$$

при любых $l=1,\ldots,k-1$, $u_k=0$. Тогда

$$T^{k-1}\mathrm{cum}\{\hat R^{(T)}(\tau_1),\ldots,\hat R^{(T)}(\tau_k)\}=\frac{\int_0^1 h^{2k}(u)\,du}{\left(\int_0^1 h^2(u)\,du\right)^k}\times$$

$$\times\sum_{u_1}\ldots\sum_{u_{k-1}}\sum_{\nu}\mathrm{cum}\{X(u_i+[\tfrac{j}{2}]\tau_i),(i,j)\in\nu_1\}\ldots$$

$$\ldots\mathrm{cum}\{X(u_i+[\tfrac{j}{2}]\tau_i),(i,j)\in\nu_p\}+O(\tfrac{1}{T}),$$

где суммирование производится по всем неразложимым разбиениям $\nu=\nu_1\cup\ldots\cup\nu_p$ таблицы (5). Оценка порядка остаточного члена равномерна по $\tau_1,\ldots,\tau_k$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.

Теорема 4. В условиях теоремы 2 случайные величины $\sqrt{T}(\hat R^{(T)}(\tau_1)-R(\tau_1)),\ldots,\sqrt{T}(\hat R^{(T)}(\tau_k)-R(\tau_k))$ имеют в асимптотике нормальное распределение с нулевым вектором математических ожиданий и ковариационной матрицей $\Sigma=(\sigma_{ij}(\tau_i,\tau_j))$ с элементами, определяемыми формулой

$$\sigma_{ij}(\tau_i,\tau_j)=\frac{\int_0^1 h^4(u)\,du}{\left(\int_0^1 h^2(u)\,du\right)^2}\times$$

$$\times\sum_u[R(u)R(u+\tau_i-\tau_j)+R(u-\tau_j)+R(u+\tau_i)+$$

$$+\mathrm{cum}\{X(u),X(u+\tau_i),X(0),X(\tau_j)\}].$$

Доказательство. Согласно теореме 2, кумулянты случайных величин $\sqrt{T}(\hat R^{(T)}(\tau_1)-R(\tau_1)),\ldots,\sqrt{T}(\hat R^{(T)}(\tau_k)-R(\tau_k))$ сходятся к кумулянтам нормального распределения: все кумулянты порядка выше двух равны нулю. По теореме 1 математические ожидания случайных величин равны нулю при $T\to\infty$. Выражения для ковариаций получены по формуле (7) с использователем формулы (10), которая при $k=2$ имеет вид:

$$\mathrm{cum}\{X(u)X(u+\tau_i),X(0),X(\tau_j)\}=$$

$$=\mathrm{cum}\{X(u),X(u+\tau_i),X(0),X(\tau_j)\}+$$

$$+\mathrm{cum}\{X(u),X(0)\}\,\mathrm{cum}\{X(u+\tau_i),X(\tau_j)\}+\mathrm{cum}\{X(u),X(\tau_j)\}\times$$

$$\times\mathrm{cum}\{X(u+\tau_i),X(0)\}.$$

Заключение теоремы следует из леммы работы [2. С. 434].

Следствие. Пусть выполняется условие A) и

$$\sum_u|R^2(u)+R(u-\tau)R(u+\tau)+$$

$$+\mathrm{cum}\{X(u),X(u+r),X(0),X(\tau)\}|<\infty.$$

Тогда случайная величина $\sqrt{T}(\hat{R}^{(T)}(\tau) - R(\tau))$ распределсна асимптотически нормально $N(0, \sigma^2(\tau))$, где

$$\sigma^2(\tau) = \frac{\int_0^1 h^4(u)\,du}{\left(\int_0^1 h^2(u)\,du\right)^2} \sum_u \left[R^2(u) + R(u-\tau)R(u+\tau) \right] +$$

$$+ \operatorname{cum}\{ X(u), X(u+\tau), X(0), X(\tau) \}.$$

Следствие. Дисперсия оценки $\hat{R}_h^{(T)}(\tau)$ минимальна по $h(.)$ в асимптотике при условии, что окно просмотра данных $h(u)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^1 h^4(u)\,du = \left(\int_0^1 h^2(u)\,du\right)^2.$$

Утверждение—частный случай следствия теоремы 2.

Список литературы

1. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов. М., 1976.
2. Бриллинджер Д. Временные ряды: Обработка данных и теория. М., 1980.
3. Леонов В. П., Ширяев А. Н. // Теория вероятностей и ее применения. 1959. Т. 4. Вып. 3. С. 342.

Поступила в редакцию 11.10.91