(порождая все соответствующие слова одного типа), или вообще не применяются (из-за отсутствия вхождений левых частей правил). Теорема доказана.

Список литературы

1. А х о А., У л ь м а н Д ж. Теория синтаксического анализа, перевода и компиляции. М., 1978. Т. 1.
2. Б р а т ч и к о в И. Л. Синтаксис языков программирования. М., 1975.
3. Г и н з б у р г С. Математическая теория контекстно-свободных языков. М., 1970.
4. М о щ е н с к и й В. А. // V респ. конф. математиков Белоруссии: Тез. докл. Гродно, 1980. Ч. 1. С.18.
5. Г л а д к и й А. В. Формальные грамматики и языки. М., 1973.
6. К у к Д., Б е й з Г. Компьютерная математика. М., 1990.

Поступила в редакцию 11.04.91.

УДК 519.71

С. Ф. ЛИПНИЦКИЙ

КОМПЬЮТЕРНЫЙ ПРАКТИКУМ: МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И АЛГОРИТМЫ АВТОМАТИЗИРОВАННОГО ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

Эффективность автоматизированных обучающих систем (АОС) существенным образом зависит от степени их интеллектуальности [1—3]. Однако отсутствие надежного математического фундамента является серьезным сдерживающим фактором интеллектуализации АОС. В данной статье предлагается математическая модель интеллектуальной системы обучения решению задач. На уровне математического моделирования исследованы условия построения эффективных процедур обучения и разработаны алгоритмы генерации маршрутов решения задач.

Основные понятия и определения. Пусть имеется некоторое конечное множество, элементы которого будем называть задачами, а для каждой задачи—i-й вариант ее решения $(i=\overline{1,n})$ т. е. конечное множество R_i, состоящее из терминальных элементов—шагов решения задачи—и двух нетерминальных—начального и конечного шагов. На множестве R_i определен строгий порядок σ_i (транзитивное и антирефлексивное отношение). Считаем, что строго упорядоченное множество $<R_i, \sigma_i>$ (будем называть его маршрутом решения задачи) имеет наибольший (начальный шаг решения задачи) и наименьший (конечный шаг) элементы, причем у двух вариантов начальные и соответственно конечные шаги разные. Пусть также $R=\bigcup_{i=1}^{n} R_i$ —множество всех шагов всех вариантов решения задачи, а 2^R—множество всех подмножеств множества R. Заметим, что отношение $\sigma=\bigcup_{i=1}^{n}\sigma_i$ —строгий порядок на R.

Определение 1. Всякое конечное бинарное отношение ρ на множестве 2^R назовем продукционным. Элементы отношения ρ будем называть правилами продукции, причем если $(A, B)\leftarrow\rho$, то множество A назовем левой, а B—правой частями правила (A, B).

Определение 2. Шаг решения задачи $b\in R$ назовем непосредственно выводимым из множества шагов $S\subseteq R$, если $b\notin S$ и существует правило продукции $(A, B)\in\rho$ такое, что $A\subseteq S$ и $b\in R$.

Определение 3. Шаг решения задачи $b\in R$ назовем выводимым из множества шагов $S\subseteq R$, если $b\notin S$ и существует кортеж $<S_1=S, S_2, \ldots, S_l|>$ $(l\geq 2)$ подмножеств множества R такой, что для любых $i,j=\overline{1,l}$ $(i\neq j)$ $S_i\neq S_j$ и всякий шаг каждого последующего множества кортежа непосредственно выводим из предыдущего или является его элементом, а $b\in S_l$.

Определение 4. Множество $S\subseteq R$ шагов решения задачи назовем одновариантным, если существует вариант $R_i\subseteq R$ $(i\in\{1, 2, \ldots n\})$ такой, что $S\subseteq R_i$.

Определение 5. Одновариантное множество $S\subseteq R_i$ $(i\in\{1, 2, \ldots, n\})$ шагов решения задачи назовем насыщенным, если для любых шагов $a \in R_i, b \in S$, удовлетворяющих соотношению $(a, b) \in \sigma_i$, справедливо $a \in S$.

Пусть $S \subseteq R_i (i \in \{1, 2, \dots, n\})$ и $S \cup \{b\}$, где $b \in R_i$, $b \notin S$—насыщенные множества. Тогда будем говорить, что шаг b непосредственно следует за множеством шагов S, или S непосредственно предшествует b.

Определение 6. Продукционное отношение назовем представительным, если для любых насыщенного множества S и шага решения задачи b любого варианта R_i $(i = \overline{1, n})$ таких, что b непосредственно следует за S, шаг b непосредственно выводим из S.

Определение 7. Продукционное отношение назовем корректным, если для любого насыщенного множества S и любого шага b любого варианта R_i $(i = \overline{1, n})$ таких, что b непосредственно не следует за S, шаг b не является непосредственно выводимым из S.

Определение 8. Продукционное отношение назовем непротиворечивым, если для всех $i = \overline{1, n}$ любой шаг $a \in R \setminus R_i$ не является выводимым из начального шага $r(i) \in R_i$.

Прямая консультация. Построение всякого маршрута решения задачи связано с нахождением после каждого выполненного шага совокупности шагов, каждый из которых может следовать за этим шагом. Эту совокупность определим как прямую консультацию.

Определение 9. Непустое множество $L \subseteq R_i (i \in \{1, 2, \dots, n\})$ всех шагов решения задачи, непосредственно следующих за произвольным насыщенным множеством $S \subseteq R_i$, назовем прямой консультацией, соответствующей S.

Теорема 1. Если продукционное отношение представительно, корректно и непротиворечиво, то прямая консультация, соответствующая любому насыщенному множеству шагов, есть одновариантная совокупность всех шагов, непосредственно выводимых из этого множества.

Доказательство. Пусть $S \subseteq R_i (i \in \{1, 2, \dots, n\})$—любое насыщенное множество шагов решения задачи. В силу корректности ρ любой шаг a, непосредственно выводимый из S, непосредственно следует за S. Тот факт, что $a \in R_i$, вытекает из непротиворечивости ρ. Таким образом, a является элементом консультации, соответствующей S. С другой стороны, любой шаг консультации, соответствующей S, непосредственно выводим из S в силу представительности продукционного отношения.

Пользуясь теоремой 1, построим следующий алгоритм получения прямой консультации.

Алгоритм 1. На входе алгоритма—насыщенное множество $S \subseteq R_i (i \in \{1, 2, \dots n\})$, число вариантов n и представительное, корректное и непротиворечивое продукционное отношение. На выходе—все прямые консультации, соответствующие S, для всех $i = \overline{1, n}$. Алгоритм состоит из следующих шагов.

1. Найти правило продукции $(A, B) \in \rho$ такое, что $A \subseteq S$ и $B \setminus S \neq \phi$. Если такое правило найдено, то перейти к п. 2, иначе—к п. 3.
2. Выдать консультацию $B \setminus S$; $\rho := \rho \setminus \{(A, B)\}$. Перейти к п. 1.
3. $i := 1$.
4. Если $B_i \setminus S \neq \phi$, где B_i—правая часть правила продукции с левой частью $r(i)$, то выдать консультацию $B_i \setminus S$, иначе—$i := i + 1$.
5. Если $i \leq n$, то перейти к п. 4, иначе —КОНЕЦ.

Алгоритм 1 заканчивает работу не более чем за $|\rho|$—кратное повторение шагов 1, 2 и не более чем за n проходов шагов 3—5.

Обратная консультация. *Определение 10.* Непустое множество M всех шагов варианта $R_i (i \in \{1, 2, \dots, n\})$, непосредственно предшествующих шагу $b \in R_i$ относительно σ_i, назовем обратной консультацией, соответствующей шагу b.

Теорема 2. Пусть отношение ρ корректно и для него выполнены следующие условия:

1) для любого шага b, кроме начального любого варианта R_i $(i = \overline{1, n})$, существует правило продукции $(A, B) \in \rho$ такое, что $b \in B$, а $A \subseteq R_i$;

2) $(A, B) \in \rho$ только тогда, когда для любого варианта R_i $(i = \overline{1, n})$ такого, что $A \subseteq R_i$, для всех $a \in A$, $b \in B$ справедливо $(a, b) \in \sigma_i$.

Тогда обратная консультация, соответствующая шагу $b \in R_i (i \in \{1, 2, \dots,$

n}), есть множество $A\setminus H$, где $A\subseteq R_i$—левая часть правила продукции, правая часть которого содержит шаг b, а H—множество всех шагов варианта R_i, для каждого шага h из которых существует кортеж правил продукции $<(C_1, D_1), (C_2, D_2), \ldots, (C_l\ D_l)>$ $(l\geq 2)$ такой, что $h\in C_1$, $b\in D_l$ и $D_j\cap C_{j+1}\neq\phi$ для всех $j=\overline{1, l-1}$.

Доказательство. Пусть b—любой шаг любого варианта $R_i(i\in\{1, 2, \ldots, n\})$, а $(A, B)\in\rho$—произвольное правило продукции такое, что $b\in B$, а $A\subseteq R_i$, которое существует в силу п. 1 условия теоремы 2. Докажем, что любой шаг $h\in A\cap R_i$, для которого существует указанный в условии теоремы 2 кортеж правил продукции, не предшествует непосредственно шагу b относительно σ_i. Действительно, согласно п. 2, условия теоремы 2 для любых $c\in C_j$, $d\in D_j$ $(j=\overline{1, l})$ $(c, d)\in\sigma_i$, а поскольку $l\geq 2$, то в силу транзитивности и антирефлексивности $\sigma_i(h, b)\in\sigma_i$ и h не предшествует непосредственно шагу b. Докажем теперь, что для любого шага $h\in A$, не предшествующего непосредственно шагу b, существует указанный выше кортеж. Поскольку $(h, b)\in\sigma_i$, то из строгой упорядоченности варианта R_i следует существование кортежа шагов $<h=h_1, h_2, \ldots, h_m=b>$ $(m>2)$ варианта R_i, где h_k непосредственно предшествует h_{k+1} относительно σ_i для всех $k=\overline{1, m-1}$. Далее, согласно п. 1, условия теоремы 2 и корректности ρ, для шагов h_k и h_{k+1} найдется правило продукции $(C_k, D_{k+1})\in\rho$ такое, что $h_k\in C_k$, $h_{k+1}\in D_{k+1}$ для любого $k=\overline{1, m-1}$, т. е. искомый кортеж правил продукции существует.

Используя теорему 2, построим следующий алгоритм нахождения обратной консультации.

Алгоритм 2. На входе алгоритма—шаг b варианта $R_i(i\in\{1, 2, \ldots\ n\})$ и корректное продукционное отношение, для которого выполнены условия теоремы 2. На выходе—обратная консультация, соответствующая шагу b. Алгоритм включает следующие шаги.

1. $H:=\phi$. Найти правило продукции $(A, B)\in\rho$ такое, что $b\in B$, а $A\subseteq R_i$.
2. Выбрать произвольный шаг $h\in A$.
3. Искать кортеж правил продукции $<(C_1, D_1), (C_2, D_2), \ldots, (C_l, D_l)>$, $l\geq 2$, такой что $h\in C_1$, $b\in D_l$, $D_j\cap C_{j+1}\neq\phi$ для всех $j=\overline{1, l-1}$. Если кортеж найден, то $A:=A\setminus\{h\}$, $H:=H\cup\{h\}$; перейти к п.2. Иначе—$A:=A\setminus\{h\}$; перейти к п. 4.
4. Если $A\neq\phi$, то перейти к п. 2. Иначе—КОНЕЦ (восстановить множество A и выдать обратную консультацию $A\setminus H$, соответствующую шагу b).

Алгоритм 2 заканчивает работу не более чем за $|A|$—кратное повторение шагов 2—4.

Путем многократного использования алгоритма 1 или 2 можно построить весь маршрут решения задачи.

Список литературы

1. Ефимов Е. И. Решатели интеллектуальных задач. М., 1982.
2. Молокова О. С. // Информатика и обучение. Владивосток, 1989.
3. Витол Л. А. // Методы и средства кибернетики и управления учебным процессом высшей школы. Рига, 1989. Вып. 5.

Поступила в редакцию 04.09.91.

УДК 519.17

Л. Н. БАТУРИНА, Н. А. ЛЕПЕШИНСКИЙ

ЗАДАЧА О МАКСИМАЛЬНОМ ПОТОКЕ НА ПРОСТЫХ ПУТЯХ

Пусть $G=(X, A, c)$—неориентированная сеть с множеством узлов X, множеством ребер $(x_i, x_j)\in A$ и целочисленной положительной функцией пропускных способностей c. В сети требуется найти целочисленный максимальный поток из источника s в сток t, реализуемый на простых (ациклических) путях длины (по числу ребер) не более K.

Введенное ограничение на множество путей, на котором реализуется поток, не позволяет непосредственно использовать для решения задачи известные (напр. приведенные в [1]) эффективные алгоритмы определения