$$[X'_7, X'_9] = 0,\ [X'_7, X'_{10}] = 0,\ [X'_8, X'_9] = 0,\ [X'_8, X'_{10}] = 0,$$

$$[X'_9, X'_{10}] = 0.$$

Из этих формул видно, что алгебра Ли $\tilde{g}$ не является простой.

Рассмотрим линейную подстановку ψ в алгебре Ли $\tilde{g}$:

$$X'_1 = \tilde{X}_1,\ X'_2 = \tilde{X}_2,$$

$$X'_3 = -\frac{1}{2}\tilde{X}_3 + \frac{\sqrt{3}}{2}\tilde{X}_4,\quad X'_4 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\tilde{X}_3 - \frac{1}{2}\tilde{X}_4,$$

$$X'_5 = -\frac{1}{2}\tilde{X}_5 + \frac{\sqrt{3}}{2}\tilde{X}_6,\quad X'_6 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\tilde{X}_5 - \frac{1}{2}\tilde{X}_6,$$

$$X'_7 = -\frac{1}{4}\tilde{X}_7 + \frac{\sqrt{3}}{4}\tilde{X}_8 + \frac{\sqrt{3}}{4}\tilde{X}_9 - \frac{3}{4}\tilde{X}_{10},$$

$$X'_8 = -\frac{\sqrt{3}}{4}\tilde{X}_7 - \frac{1}{4}\tilde{X}_8 + \frac{3}{4}\tilde{X}_9 + \frac{\sqrt{3}}{4}\tilde{X}_{10},$$

$$X'_9 = -\frac{\sqrt{3}}{4}\tilde{X}_7 + \frac{3}{4}\tilde{X}_8 - \frac{1}{4}\tilde{X}_9 + \frac{\sqrt{3}}{4}\tilde{X}_{10},$$

$$X'_{10} = -\frac{3}{4}\tilde{X}_7 - \frac{\sqrt{3}}{4}\tilde{X}_8 - \frac{\sqrt{3}}{4}\tilde{X}_9 - \frac{1}{4}\tilde{X}_{10}.$$

Подставляя эти выражения в формулы (7), убеждаемся, что ψ является автоморфизмом 3-го порядка алгебры g. Таким образом, мы получаем предельное однородное периодическое пространство порядка 3 с непростой основной группой.

Применяя указанный предельный переход к периодическим пространствам с простыми основными группами, классифицированными в [4], можно получить целый ряд новых периодических пространств с непростыми основными группами.

Список литературы

1. Unonu E., Wigner E. // Proc. Nat. Acad. Sci(USA).1953. V. 39. P. 510.
2. Saletan E. // Journ. Math. Phys. 1961. V. 2. № 1.
3. Феденко А. С. // УМН. 1957. Т. 12. № 3.
4. Феденко А. С. Пространства с симметриями. Мн., 1977.

Поступила в редакцию 11.09.91.

УДК 681.3.06:51

В. А. МОЩЕНСКИЙ, Д. В. ДВОРЦОВОЙ

КОНТЕКСТНО–СВОБОДНЫЕ И АКСИОМАТИЧЕСКИЕ ГРАММАТИКИ

При грамматическом разборе требуется установить, принадлежит ли данная цепочка языку, порождаемому данной грамматикой; причем в нисходящем разборе [1] пытаются эту цепочку получить из начального символа. Эта проблема весьма важна для класса КС-грамматик из-за их роли в порождении языков программирования [1—3]. Мы опишем еще один класс грамматик, впервые упомянутый в [4], с помощью которого в будущем предполагается облегчить проблему грамматического разбора для КС-грамматик благодаря возможности выводить слова не только из начального символа.

Определение 1. Аксиоматическая грамматика (кратко АК-грамматика)—это упорядоченная тройка $G = \langle V, A, R \rangle$, где V—конечное непустое множество (называемое алфавитом), A—конечное (возможно, пустое) множество слов в алфавите V (называемых аксиомами) и R—конечное (возможно, пустое) множество выражений вида $x \to y$ (называемых правилами вывода), в которых x и y—различные слова в алфавите V, а символ $\to$ не принадлежит V.

Определение 2. Скажем, что слово b непосредственно выводимо в AK-грамматике G из слова a (символически $a \models b$), если $a = d_1 x d_2$; $b = d_1 y d_2$ (d_1 и d_2—возможно, пустые слова) и G имеет правило $x \to y$. Слово a порождается G, если существует последовательность слов $x_1, x_2, \ldots, x_m$ такая, что $x_m = a$ и каждое x_i есть или аксиома из G, или $x_j \models x_i$ при $j < i$ (будем говорить, что x_m выводимо из x_1 и писать $x_1 \vdash x_m$).

Множество всех слов, порождаемых AK-грамматикой G, называется AK-языком (или просто языком), порождаемым G.

Замечание 1. Каждое конечное множество A слов в алфавите V является AK-языком, ибо за аксиомы можно взять это множество A при пустом множестве правил. Это же множество порождается и автоматными грамматиками (A-грамматиками) [5]. Но, с другой стороны, существует AK-язык, который не является A-языком. Действительно, известно, что язык $L_1 = \{ a^n b^n \mid n \geq 1 \}$ не порождается ни одной A-грамматикой [1. 6. 152], но этот язык L_1 порождается следующей AK-грамматикой $G_1 = \langle \{a, b\}, \{ab\}, \{ab \to a^2 b^2\} \rangle$.

Условимся через $|x|$ обозначать длину слова x, пустое слово будем обозначать Λ. В дальнейшем нам понадобится одно утверждение о KC-языках, которое имеется во многих источниках, но мы приведем его в том виде, в котором оно сформулировано в [1. C. 223].

Теорема 1 [1]. Пусть L —KC-язык. Тогда существует такое натуральное число n, что если $z \in L$ и $|z| \geq n$, то z может быть записано в виде $z = uvwxy$, где $vx \neq \Lambda$, $|vwx| \leq n$ и для любого $i \geq 1$ выполнено условие $uv^i wx^i y \in L$.

Основываясь на этой теореме, введем

Определение 3. Наименьшее число n из теоремы 1 назовем индексом KC-языка L. Две цепочки z_1 и z_2 из данного KC-языка индекса n длины не менее чем n назовем словами одного и того же типа, если существуют такие цепочки u, v, w, x, y, что $z_1 = uv^m wx^m y$, а $z_2 = uv^k wx^k y$; в противном случае о таких цепочках будем говорить, что они различного типа*.

Замечание 2. Не следует думать, что каждая цепочка z из данного KC-языка индекса n при $|z| \geq n$ представима единственным образом в виде $z = uvwxy$ из теоремы 1. Например, KC-язык $L_2 = \{a^n b^m a^m b^n \mid n, m \geq 1\}$ имеет индекс 4 и цепочка $z = abab$, для которой $|z| = 4$, может быть представлена следующими двумя способами:

1) $z = u_1 v_1 w_1 x_1 y_1$ при $u_1 = x_1 = a$, $w_1 \Lambda$, $v_1 = y_1 = b$ и $u_1 v^i_1 w_1 x^i_1 \in L_2$ для всех $i \geq 1$;

2) $z = u_2 v_2 w_2 x_2 y_2$ при $u_2 = y_2 = \Lambda$, $v_2 = a$, $x_2 = b$, $w = ba$ и $u_2 v^i_2 w_2 x^i_2 y_2 \in L_2$ для всех $i \geq 1$.

Поэтому одна и та же цепочка с разными по структуре цепочками может быть одного и того же типа. Но ясно, что одна и та же цепочка каждого KC-языка обладает только конечным числом различных типов. Еще заметим, что L_2 является AK-языком, так как порождается AK-грамматикой $G_2 = \langle \{a, b\}, \{abab\}, \{abab \to a^2bab^2, ba \to b^2a^2\} \rangle$. Аналогично доказывается, что любой KC-язык вида:

$$\{ a_{i_1}^{m_1} a_{i_2}^{m_2} \ldots a_{i_k}^{m_k} b_{i_k}^{m_k} \ldots b_{i_2}^{m_2} b_{i_1}^{m_1} \mid \forall_{m_i} \geq 1, 1 \leq i \leq k \},$$

где все буквы $a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}, b_{i_1}, \ldots, b_{i_k}$ попарно различны, есть AK-язык; но следующий KC-язык $L_3 = \{a^n b^m a^k b^k a^m b^n \mid m, n, k \geq 1\}$ не является AK-языком (см. далее).

Лемма 1. Число попарно различных типов слов конечно в каждом KC-языке.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем некоторый KC-язык L. Пусть его индекс равен n. Тогда найдется KC-грамматика G, которая порождает этот язык L. Если L является конечным, то лемма доказана. Если же язык L есть бесконечный, то грамматика G является рекурсивной [6] и, согласно доказательству теоремы 1 из [1] или [6], будет выполнено условие: из A

*Часто вместо термина *слово* будем употреблять *цепочка*.

будет выводима цепочка vAx, т. е. символически $A \vdash vAx$, где $vx \neq \Lambda$, $|vwx| \leq n$ и, значит, $|vx| < n$, а A—некоторый вспомогательный символ. Тогда цепочки uv^iwx^iy ($i \geq 1$) из L, являющиеся цепочками одного и того же вида, будут определяться свойством $A \vdash vAx$ при $|vx| < n$ для данного индекса n. Так как каждая КС-грамматика содержит конечное число основных и вспомогательных символов и конечное число правил, то такая грамматика обладает только конечным числом свойств вида $A \vdash vAx$ при $|vx| < n$ для фиксированного n. Следовательно, каждая КС-грамматика задает КС-язык, содержащий слова только конечного числа различных типов. Лемма доказана.

Итак, каждый КС-язык индекса n содержит только конечное число различных типов слов длины не менее чем n:

$$u_1v_1^iw_1x_1^iy_1,\ u_2v_2^iw_2x_2^i\,y_2,\dots,\ u_kv_k^iw_kx_k^iy_k, \tag{1}$$

причем некоторые слова могут быть представлены разными типами.

Определение 4. КС-язык индекса n назовем языком типа 1 (кратко КС-1-языком), если в последовательности (1) никакое из слов $v_m^nw_mx_m^n$ ($1 \leq m \leq k$) не является подсловом слов $v_j^nw_jx_j^n$ ($1 \leq j \leq k, j \neq m$) и во всяком представлении z при $|z| \geq n$ в виде $z = uv^iwx^iy(i \geq n)$ подслово v^nwx^n имеет единственное вхождение в z и не имеет ни одного вхождения в слова из языка других типов.

Замечание 3. Не каждый КС-язык является КС-1-языком. Рассмотрим КС-язык $L_4 = \{a^nb^n \mid n \geq 1\} \cup \{a^{2n}b^n \mid n \geq 1\}$ индекса 3, порождаемый КС-грамматикой G_4 с правилами

$$S \to S_1 \mid S_2,\ S_1 \to aS_1b \mid ab, S_2 \to a^2S_2b \mid a^2b.$$

Так как слово a^3b^3 есть подслово слова a^6b^3, то L_4 не КС-1-язык. К тому же можно «прямо в лоб» доказать, что язык L_4 не порождается ни одной АК-грамматикой. КС-язык L_3 из замечания 2 не является КС-1-языком, так как для цепочки $z = ababab$, представимой в виде $z = uvwxy$ при $u = y = ab$, $v = a, w = \Lambda$, $x = b$ (причем $uv^iwx^iy \in L_3$ при любом $i \geq 1$) подслово $v^6wx^6 = a^6b^6$ является также подсловом слова $a^7b^7a^6b^6a^7b^7$ из L_3.

Теорема 2. Для каждого КС-1-языка найдется АК-грамматика, порождающая этот язык.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем некоторый КС-1-язык L. Если язык L является конечным (а эта проблема разрешима, согласно теореме 4.1.2. из [3]), то за аксиомы искомой АК-грамматики возьмем множество L при пустом множестве правил. Если же L является бесконечным и его индекс равен n, то для цепочек из L длины не менее чем n, согласно лемме 1, все различные типы слов задаются последовательностью (1). В этом случае за аксиомы АК-грамматики G возьмем все слова из L длины строго меньшей чем n, и еще все слова, задаваемые последовательностью (1), в которых показатель степени i удовлетворяет неравенству $i \leq n$ (их конечное число, потому что, как замечено в доказательстве леммы 1, выполнено неравенство $|v_mw_mx_m| \leq n$, $1 \leq m \leq k$). Правила вывода определяются по последовательности (1) и полагаются следующими:

$$v_m^nw_mx_m^n \to v_m^{n+1}w_mx_m^{n+1},\ 1 \leq m \leq k, \tag{2}$$

где для любого $m(1 \leq m \leq k)$ выполнено $|v_mw_mx_m| \leq n$.

Теперь убедимся, что язык L порождается АК-грамматикой G. Согласно определению множества аксиом G, все слова из L длины не более чем n порождаются грамматикой G как аксиомы; причем таким же образом порождаются и слова из L длины больше чем n всех типов, в которых показатель степени не превосходит n. Остальные слова этих типов получаются применением правил (2).

Наконец, докажем, что G не порождает ни одного слова, не принадлежащего L. Во-первых, ни одно из правил (2) не применимо к словам длины не более чем n, ибо не бывает вхождений слов большей длины в слова меньшей длины. Во-вторых, к словам длины не более чем n выписанные правила применяются, согласно определению КС-1-языка или однозначно (порождая все соответствующие слова одного типа), или вообще не применяются (из-за отсутствия вхождений левых частей правил). Теорема доказана.

Список литературы

1. Ахо А., Ульман Дж. Теория синтаксического анализа, перевода и компиляции, М., 1978. Т. 1.
2. Братчиков И. Л. Синтаксис языков программирования. М., 1975.
3. Гинзбург С. Математическая теория контекстно-свободных языков. М., 1970.
4. Мощенский В. А. // V респ. конф. математиков Белоруссии: Тез. докл. Гродно, 1980. Ч. 1. С.18.
5. Гладкий А. В. Формальные грамматики и языки. М., 1973.
6. Кук Д., Бейз Г. Компьютерная математика. М., 1990.

Поступила в редакцию 11.04.91.

УДК 519.71

С. Ф. ЛИПНИЦКИЙ

КОМПЬЮТЕРНЫЙ ПРАКТИКУМ: МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И АЛГОРИТМЫ АВТОМАТИЗИРОВАННОГО ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

Эффективность автоматизированных обучающих систем (АОС) существенным образом зависит от степени их интеллектуальности [1—3]. Однако отсутствие надежного математического фундамента является серьезным сдерживающим фактором интеллектуализации АОС. В данной статье предлагается математическая модель интеллектуальной системы обучения решению задач. На уровне математического моделирования исследованы условия построения эффективных процедур обучения и разработаны алгоритмы генерации маршрутов решения задач.

Основные понятия и определения. Пусть имеется некоторое конечное множество, элементы которого будем называть задачами, а для каждой задачи—i-й вариант ее решения $(i=\overline{1,n})$ т. е. конечное множество R_i, состоящее из терминальных элементов—шагов решения задачи—и двух нетерминальных—начального и конечного шагов. На множестве R_i определен строгий порядок σ_i (транзитивное и антирефлексивное отношение). Считаем, что строго упорядоченное множество $<R_i, \sigma_i>$ (будем называть его маршрутом решения задачи) имеет наибольший (начальный шаг решения задачи) и наименьший (конечный шаг) элементы, причем у двух вариантов начальные и соответственно конечные шаги разные. Пусть также $R=\bigcup\limits_{i=1}^{n} R_i$ —множество всех шагов всех вариантов решения задачи, а 2^R—множество всех подмножеств множества R. Заметим, что отношение $\sigma=\bigcup\limits_{i=1}^{n}\sigma_i$ —строгий порядок на R.

Определение 1. Всякое конечное бинарное отношение ρ на множестве 2^R назовем продукционным. Элементы отношения ρ будем называть правилами продукции, причем если $(A, B)\leftarrow\rho$, то множество A назовем левой, а B—правой частями правила (A, B).

Определение 2. Шаг решения задачи $b\in R$ назовем непосредственно выводимым из множества шагов $S\subseteq R$, если $b\notin S$ и существует правило продукции $(A, B)\in\rho$ такое, что $A\subseteq S$ и $b\in R$.

Определение 3. Шаг решения задачи $b\in R$ назовем выводимым из множества шагов $S\subseteq R$, если $b\notin S$ и существует кортеж $<S_1=S, S_2, \dots, S_l|>$ $(l\geq 2)$ подмножеств множества R такой, что для любых $i,j=\overline{1,l}$ $(i\neq j)$ $S_i\neq S_j$ и всякий шаг каждого последующего множества кортежа непосредственно выводим из предыдущего или является его элементом, а $b\in S_l$.

Определение 4. Множество $S\subseteq R$ шагов решения задачи назовем одновариантным, если существует вариант $R_i\subseteq R$ $(i\in\{1, 2, \dots n\})$ такой, что $S\subseteq R_i$.

Определение 5. Одновариантное множество $S\subseteq R_i$ $(i\in\{1, 2, \dots, n\})$ шагов