Доказательство леммы 3 аналогично доказательству соответствующей леммы из [5].

Зададим на R следующие отношения эквивалентности:

1. i_∞ — отношение равенства отображений: для любых $\delta, \sigma \subset R$, $\delta i_\infty \sigma$ <=> для любого $a \subset E_c \delta(a) = \sigma(a)$;

2. i_0 — тождественно-истинное отношение: для любых $\delta, \sigma \subset R$, $\delta i_0 \sigma$;

3. i_m — отношение m-префиксного равенства: $\delta, \sigma \subset R$, $\delta i_m \sigma$ <=> <=> для любого $a \subset E_c \delta(a)$ и $\sigma(a)$ имеют равные префиксы длины m, $(m = 1, 2, \ldots)$.

Лемма 4. При любом $k \geq 2$ и любых $R, R \subset (E_k)^{E_c}$, отношения $i_0, i_\infty, i_m, m \geq 1$ являются согласованными отношениями эквивалентности.

Утверждение леммы 4 является очевидным для i_0 и i_∞. Для отношений i_m, $m \geq 1$ утверждение леммы 4 следует, в частности, из леммы 2.

Имеет место следующая

Теорема. Для любого $k \geq 2$ и любых $R, R \subset (E_k^\infty)^{E_c}$, $F(R) = P_k$, $\chi_a = \langle R, i_0; P_k \rangle$, $\chi_0 = \langle R, i_\infty; P_k \rangle$, $\kappa_m = \langle R, i_m; P_k \rangle$, $m = 1, 2, \ldots$

Доказательство равенств $\langle R, i_0; P_k \rangle = \chi_a$ и $\langle R, i_\infty; P_k \rangle = \chi_0$ следует из определений 3—5 и описания i_0, i_∞. Для отношений i_m равенство $\langle R, i_m; P_k \rangle = \kappa_m$ $m \geq 1$ следует из определений конгруэнции κ_m, с.о.э. i_m и леммы 2.

Список литературы

1. Мальцев А. И. // Алгебра и логика. 1966. Т. 5. № 2. С. 5.
2. Dassow J. // Coll. Math. Soc. Janos Bolyai. 1979. V. 28. P. 161.
3. Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов. М., 1985.
4. Фахми М. Х. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1989. № 3. С. 58.
5. Горлов В. В. // Математические заметки. 1985. Т. 38. № 5. С. 756.
6. Горлов В. В., Фахми М. Х. //Тез. докл. Междунар. конф. по алгебре. 1991. Т. 4. С. 133.

Поступила в редакцию 25.09.91.

УДК.516.72

С. А. ПЕРЕЛЫГИНА

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Идея предельного пространства была известна уже Лобачевскому: устремляя кривизну пространства Лобачевского к нулю, в пределе получаем евклидово пространство. Аналогично, устремляя радиус сферы к бесконечности, в пределе получаем евклидову плоскость. В физике эта идея была воспринята после создания Эйнштейном теории относительности. Релятивистская механика Эйнштейна при стремлении скорости света к бесконечности переходит в классическую механику Ньютона.

В 50-х гг. XX в. возобновился интерес к предельным переходам в геометрии и физике. В 1953 г. Иненю и Вигнер [1] описали предельный переход группы Лоренца к группе Галилея на языке алгебр Ли: пусть g — вещественная конечномерная алгебра Ли и $X_1, X_2, \ldots, X_r$ — некоторый ее базис. Проведем замену базиса по формулам:

$$X_i = U_i^j X_j, \tag{1}$$

где

$$U_i^j = u_i^j + \epsilon w_i^j, \tag{2}$$

$$u = \begin{vmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0_{r-s} \end{vmatrix}, \quad \omega = \begin{vmatrix} V & 0 \\ 0 & E_{r-s} \end{vmatrix}, \tag{3}$$

где V — нильпотентная матрица индекса 1. Исследованы условия осуществимости такого предельного перехода, дано применение к переходу от группы Лоренца к группе Галилея.

В работе Салетана [2] описывается предельный переход Иненю — Вигнера с матрицей V, имеющей произвольный индекс нильпотентности и даны физические приложения.

Предельный переход в геометрии изложен в работе [3], посвященной исследованию неприводимых симметрических (псевдо)римановых пространств. Рассмотрим произвольное симметрическое пространство с основной группой G и стационарной подгруппой H.

Структурные формулы для соответствующих алгебр Ли имеют вид:

$$[X_i, X_j] = C_{ij}^k X_k,$$

$$[X_p, X_i] = C_{pi}^q X_q, \tag{4}$$

$$[X_p, X_q] = C_{pq}^i X_i,$$

где $X_1, \ldots, X_n, X_{n+1}, \ldots, X_r$ — базис алгебры Ли группы G, причем $X_1, \ldots, X_n$ образуют базис алгебры Ли группы H. Векторы $X_{n+1}, \ldots, X_r$ разделим на две группы: X_α, X_λ. То же самое сделаем с векторами $X_1, \ldots, X_n$; X_i и X_p. Произведем замену базиса в алгебре g:

$$X'_\alpha = X_\alpha, \quad X'_\lambda = E^2 X_\lambda, \quad X'_i = E X_i, \quad X'_p = E^3 X_p, \tag{5}$$

где E — параметр, который устремляется к нулю. Изучаются условия выполнимости указанного предельного перехода, даются применения к разысканию симметрических пространств с неполупростыми основными группами.

Предельный переход, рассмотренный в [1], [2], будем называть предельным переходом первой степени, а в [3] —третьей, так как в первом случае используется E в первой степени, а во втором — в третьей. В настоящей работе исследуем предельные пространства для однородных периодических пространств с простыми основными группами, классифицированных в [4]. Для решения этой задачи мы рассматриваем предельный переход k-й степени.

Пусть G — произвольная группа Ли с алгеброй Ли g и $X_1, \ldots, X_r$ — некоторый базис алгебры g. Векторы базиса разобьем на несколько групп: $X_{i_0}, X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_k}$; $i_0 = 1, \ldots, r_0$; $i_1 = r_0 + 1, \ldots, r_1$; ...; $i_k = r_{k-1} + 1, \ldots, r$.

Будем предполагать, что векторы X_{i_0}, X_{i_2} порождают подалгебру $\mathfrak{h}_0$ алгебры g. Следовательно, мы рассматриваем однородное пространство G/H. Сделаем замену базиса:

$$X'_{i_0} = X_{i_0}, \quad X'_{i_1} = E X_{i_1}, \quad X'_{i_2} = E^2 X_{i_2}, \quad \ldots, \quad X'_{i_k} = E^k X_{i_k}. \tag{6}$$

Формулы (4) примут вид:

$$[X'_{i_0}, X'_{j_0}] = C_{i_0\, j_0}^{l_0} X'_{l_0} + \frac{1}{E^2} C_{i_0\, j_0}^{l_2} X'_{l_2},$$

$$[X'_{i_0}, X'_{i_2}] = E^2 C_{i_0\, i_2}^{l_0} X'_{l_0} + C_{i_0\, i_2}^{l_2} X_{l_2},$$

$$[X'_{i_2}, X'_{j_2}] = E C_{i_2\, j_2}^{l_0} X'_{l_0} + E^2 C_{i_2\, j_2}^{l_2} X_{l_2},$$

$$[X'_{i_0}, X'_{j_1}] = E C_{i_0\, j_1}^{l_0} X'_{l_0} + C_{i_0\, j_1}^{l_1} X'_{l_1} + \frac{1}{E} C_{i_0\, j_1}^{l_2} X'_{l_2} + \ldots + \frac{1}{E^{k-1}} C_{i_0\, j_1}^{l_k} X'_{l_k},$$

. . . .

$$[X'_{i_0}, X'_{i_k}] = E^k C_{i_0\, i_k}^{l_0} X'_{l_0} + E^{k-1} C_{i_0\, i_k}^{l_1} X'_{l_1} + \ldots + C_{i_0\, i_k}^{l_k} X'_{l_k},$$

$$[X'_{i_1}, X'_{i_2}] = E^3 C^{l_0}_{i_1\, i_2} X'_{l_0} + E^2 C^{l_1}_{i_1\, i_2} X'_{l_1} + \ldots + \underline{E^{\frac{1}{k-3}} C^{l_k}_{i_1\, i_2} X_{l_k}}, \qquad (7)$$

$$[X'_{i_{k-1}}, X'_{i_k}] = E^{k^2-k} C^{l_0}_{i_{k-1}\, i_k} X'_{l_0} +$$

$$+ E^{k^2-k-1} C^{l_1}_{i_{k-1}\, i_k} X'_{l_1} + \ldots + E^{k^2-2k} C^{l_k}_{i_{k-1}\, i_k} X'_{l_k},$$

$$[X'_{i_k}, X'_{j_k}] = E^{2k} C^{l_0}_{i_k\, j_k} X'_{l_0} + E^{2k-1} C^{l_1}_{i_k\, j_k} X'_{l_1} + \ldots + E^{k} C^{l_k}_{i_k\, j_k} X'_{l_k}.$$

Для того чтобы предельный переход $E \to 0$ был возможен, необходимо и достаточно, чтобы подчеркнутые члены были равны нулю. Отсутствие слагаемого $\frac{1}{E^2} C^{l_2}_{i_0\, j_0} X'_{l_2}$ означает, что векторы X'_{i_0} порождают подалгебру $\mathfrak{h}_0$ алгебры $\mathfrak{g}$. Отсутствие всех подчеркнутых слагаемых приводит к цепочке вложенных друг в друга подпространств пространства $\mathfrak{g}$,

$$\mathfrak{h}_0 \subset \mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{h}_{k-1}.$$

Предполагая, что эти условия выполнены, положим $E = 0$. Получаются слудующие структурные формулы для алгебры Ли предельного однородного пространства:

$$[X_{i_0}, X_{j_0}] = C^{l_0}_{i_0\, j_0} X_{l_0}, \quad [X_{i_0}, X_{i_2}] = C^{l_2}_{i_0\, i_2} X_{l_2}, \quad [X_{i_2}, X_{j_2}] = 0,$$

$$[X_{i_0}, X_{i_1}] = C^{l_1}_{i_0\, i_1} X_{l_1}, \ \ldots \ , [X_{i_0}, X_{i_k}] = C^{l_k}_{i_0\, i_k} X_{l_k},$$

$$[X_{i_1}, X_{i_2}] = C^{l_2}_{i_1\, i_2} X_{l_2}, \ \ldots \ , [X_{i_1}, X_{i_k}] = 0, \ \ldots,$$

$$[X_{i_2}, X_{i_3}] = C^{l_5}_{i_2\, i_3} X_{l_5}, \ \ldots \ , [X_{i_1}, X_{i_k}] = 0, \ \ldots,$$

$$[X_{i_{k-1}}, X_{i_k}] = 0, \quad [X_{i_k}, X_{j_k}] = 0.$$

Проиллюстрируем указанный метод предельного перехода на конкретном примере. Рассмотрим простую группу $SO(5)$ вещественных ортогональных матриц пятого порядка с определителем 1. Ее алгебра Ли $SO(5)$ состоит из всех вещественных кососимметрических матриц порядка 5. Известно [4], что любой автоморфизм группы Ли $G = SO(5)$ имеет вид: $\Phi: SO(5) \to SO(5)$, $A \to TAT^{-1}$, где $T \in SO(5)$; $T = (1, T_1, T_2)$,

$$T_1 = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}, \quad T_2 = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}.$$

Множество всех Φ-неподвижных элементов группы G образует подгруппу H. Однородное пространство G/H является периодическим пространством порядка 3. Как показано в [4], базис алгебры Ли группы $\mathfrak{g}$ можно взять в виде:

$$X_1 = l_{23} - l_{32}, \ X_2 = l_{45} - l_{54}, \ X_3 = l_{12} - l_{21}, \ X_4 = l_{13} - l_{31}, \ X_5 = l_{14} - l_{41}, \ X_6 =$$

$$= l_{15} - l_{51}, \ X_7 = l_{24} - l_{42}, \ X_8 = l_{25} - l_{52}, \ X_9 = l_{34} - l_{43}, \ X_{10} = l_{35} - l_{53}.$$

Структурные формулы алгебры g имеют вид:

$$[X_1, X_2] = 0,\ [X_1, X_3] = -X_4,\ [X_1, X_4] = X_3,$$

$$[X_1, X_5] = 0,\ [X_1, X_6] = 0,\ [X_1, X_7] = -X_9,$$

$$[X_1, X_8] = -X_{10},\ [X_1, X_9] = X_7,\ [X_1, X_{10}] = X_8,$$

$$[X_2, X_3] = 0,\ [X_2, X_4] = 0,\ [X_2, X_5] = -X_6,$$

$$[X_2, X_6] = X_5,\ [X_2, X_7] = -X_8,\ [X_2, X_8] = X_7,$$

$$[X_2, X_9] = -X_{10},\ [X_2, X_{10}] = X_9,\ [X_3, X_4] = -X_1,$$

$$[X_3, X_5] = -X_7,\ [X_3, X_6] = -X_8,\ [X_3, X_7] = X_5,$$

$$[X_3, X_8] = X_6,\ [X_3, X_9] = 0,\ [X_3, X_{10}] = 0,\ [X_4, X_5] = -X_9,$$

$$[X_4, X_6] = -X_{10},\ [X_4, X_7] = 0,\ [X_4, X_8] = 0,\ [X_4, X_9] = X_5,$$

$$[X_4, X_{10}] = X_6,\ [X_5, X_6] = -X_2,\ [X_5, X_7] = -X_3,\ [X_5, X_8] = 0,$$

$$[X_5, X_9] = -X_4,\ [X_5, X_{10}] = 0,\ [X_6, X_7] = 0,\ [X_6, X_8] = -X_3,$$

$$[X_6, X_9] = 0,\ [X_6, X_{10}] = -X_4,\ [X_7, X_8] = -X_2,\ [X_7, X_9] = -X_1,$$
$$[X_7, X_{10}] = 0,\ [X_8, X_9] = 0,\ [X_8, X_{10}] = -X_1,\ [X_9, X_{10}] = -X_2.$$

Делаем замену базиса:

$$X'_1 = X_1,\ X'_2 = E^2X_2,\ X'_3 = EX_3,\ X'_4 = EX_4,\ X'_5 = EX_5,\ X'_6 = EX_6,$$
$$X'_7 = E^2X_7,\ X'_8 = E^2X_8,\ X'_9 = E^2X_9,\ X^1_{10} = E^2X_{10}.$$

Структурные формулы примут вид:

$$[X'_1, X'_2] = 0,\ [X'_1, X'_3] = -X'_4,\ [X'_1, X'_4] =$$
$$= X_3,\ [X'_1, X'_5] = 0,\ [X'_1, X'_6] = 0,$$

$$[X'_1, X'_7] = -X'_9,\ [X'_1, X'_8] = -X'_{10},\ [X'_1, X'_9] = X'_7,\ [X'_1, X'_{10}] = X'_8,$$

$$[X'_2, X'_3] = 0,\ [X'_2, X'_4] = 0,\ [X'_2, X'_5] = -X_6,\ [X'_2, X'_6] = X'_5,$$

$$[X'_2, X'_7] = -E^2X_8,\ [X'_2, X'_8] = E^2X'_7,\ [X'_2, X'_9] =$$

$$= -E^2X'_{10},\ [X'_2, X'_{10}] = E^2X'_9,$$

$$[X'_3, X'_4] = -E^2X'_1,\ [X'_3, X'_5] = -X'_7,\ [X'_3, X'_6] =$$
$$= -X'_8,\ [X'_3, X'_7] = E^2X'_5,$$

$$[X'_3, X'_8] = E^2X'_6,\ [X'_3, X'_9] = 0,\ [X'_3, X'_{10}] = 0,\ [X'_4, X'_5] = -X'_9,$$

$$[X'_4, X'_6] = -X'_{10},\ [X'_4, X'_7] = 0,\ [X'_4, X'_8] = 0,\ [X'_4, X'_9] = E^2X'_5,$$

$$[X'_4, X'_{10}] = E^2X'_6,\ [X'_5, X'_6] = -X'_2,\ [X'_5, X'_7] =$$
$$= -E^2X'_3,\ [X'_5, X'_8] = 0,$$

$$[X'_5, X'_9] = -E^2X'_4,\ [X'_5, X'_{10}] = 0,\ [X'_6, X'_8] = -E^2X'_3,\ [X'_6, X'_7] = 0,$$

$$[X'_6, X'_9] = 0,\ [X'_6, X'_{10}] = -E^2X'_4,\ [X'_7, X'_8] =$$
$$= -E^2X'_2,\ [X'_7, X'_9] = -E^4X'_1,$$

$$[X'_7, X'_{10}] = 0,\ [X'_8, X'_9] = 0,\ [X'_8, X'_{10}] =$$
$$= -E^4X'_1,\ [X'_9, X'_{10}] = -E^2X'_2,$$

Полагая $E = 0$, получаем следующие структурные формулы для алгебры Ли $\mathfrak{g}$ предельного однородного пространства:

$$[X'_1, X'_2] = 0,\ [X'_1, X'_3] = -X'_4,\ [X'_1, X'_4] = X'_3,\ [X'_1, X'_5] = 0,$$

$$[X'_1, X'_6] = 0,\ [X'_1, X'_7] = -X'_9,\ [X'_1, X'_8] = -X'_{10},\ [X'_1, X'_9] = X'_7,$$

$$[X'_1, X'_{10}] = X'_8,\ [X'_2, X'_3] = 0,\ [X'_2, X'_4] = 0,\ [X'_2, X'_5] = -X'_6,$$

$$[X'_2, X'_6] = X'_5,\ [X'_2, X'_7] = 0,\ [X'_2, X'_8] = 0,\ [X'_2, X'_9] = 0,$$

$$[X'_2, X'_{10}] = 0,\ [X'_3, X'_4] = 0,\ [X'_3, X'_5] = -X'_7,\ [X'_3, X'_6] = -X'_8,$$

$$[X'_3, X'_7] = 0,\ [X'_3, X'_8] = 0,\ [X'_3, X'_9] = 0,\ [X'_3, X'_{10}] = 0,$$

$$[X'_4, X'_5] = -X'_9,\ [X'_4, X'_6] = -X'_{10},\ [X'_4, X'_7] = 0,\ [X'_4, X'_8] = 0,$$

$$[X'_4, X'_9] = 0,\ [X'_4, X'_{10}] = 0,\ [X'_5, X'_7] = 0,\ [X'_5, X'_6] = -X'_2,$$

$$[X'_5, X'_8] = 0,\ [X'_5, X'_9] = 0,\ [X'_5, X'_{10}] = 0,\ [X'_6, X'_7] = 0,$$
$$[X'_6, X'_8] = 0,\ [X'_6, X'_9] = 0,\ [X'_6, X'_{10}] = 0,\ [X'_7, X'_8] = 0,$$

$$[X'_7, X'_9] = 0, \quad [X'_7, X'_{10}] = 0, \quad [X'_8, X'_9] = 0, \quad [X'_8, X'_{10}] = 0,$$

$$[X'_9, X'_{10}] = 0.$$

Из этих формул видно, что алгебра Ли $\tilde{g}$ не является простой.

Рассмотрим линейную подстановку ψ в алгебре Ли $\tilde{g}$:

$$X'_1 = \tilde{X}_1, \quad X'_2 = \tilde{X}_2,$$

$$X'_3 = -\frac{1}{2}\tilde{X}_3 + \frac{\sqrt{3}}{2}\tilde{X}_4, \quad X'_4 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\tilde{X}_3 - \frac{1}{2}\tilde{X}_4,$$

$$X'_5 = -\frac{1}{2}\tilde{X}_5 + \frac{\sqrt{3}}{2}\tilde{X}_6, \quad X'_6 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\tilde{X}_5 - \frac{1}{2}\tilde{X}_6,$$

$$X'_7 = -\frac{1}{4}\tilde{X}_7 + \frac{\sqrt{3}}{4}\tilde{X}_8 + \frac{\sqrt{3}}{4}\tilde{X}_9 - \frac{3}{4}\tilde{X}_{10},$$

$$X'_8 = -\frac{\sqrt{3}}{4}\tilde{X}_7 - \frac{1}{4}\tilde{X}_8 + \frac{3}{4}\tilde{X}_9 + \frac{\sqrt{3}}{4}\tilde{X}_{10},$$

$$X'_9 = -\frac{\sqrt{3}}{4}\tilde{X}_7 + \frac{3}{4}\tilde{X}_8 - \frac{1}{4}\tilde{X}_9 + \frac{\sqrt{3}}{4}\tilde{X}_{10},$$

$$X'_{10} = -\frac{3}{4}\tilde{X}_7 - \frac{\sqrt{3}}{4}\tilde{X}_8 - \frac{\sqrt{3}}{4}\tilde{X}_9 - \frac{1}{4}\tilde{X}_{10}.$$

Подставляя эти выражения в формулы (7), убеждаемся, что ψ является автоморфизмом 3-го порядка алгебры g. Таким образом, мы получаем предельное однородное периодическое пространство порядка 3 с непростой основной группой.

Применяя указанный предельный переход к периодическим пространствам с простыми основными группами, классифицированными в [4], можно получить целый ряд новых периодических пространств с непростыми основными группами.

Список литературы

1. Unonu E., Wigner E. // Proc. Nat. Acad. Sci(USA).1953. V. 39. P. 510.
2. Saletan E. // Journ. Math. Phys. 1961. V. 2. № 1.
3. Феденко А. С. // УМН. 1957. Т. 12. № 3.
4. Феденко А. С. Пространства с симметриями. Мн., 1977.

Поступила в редакцию 11.09.91.

УДК 681.3.06:51

В. А. МОЩЕНСКИЙ, Д. В. ДВОРЦОВОЙ

КОНТЕКСТНО-СВОБОДНЫЕ И АКСИОМАТИЧЕСКИЕ ГРАММАТИКИ

При грамматическом разборе требуется установить, принадлежит ли данная цепочка языку, порождаемому данной грамматикой; причем в нисходящем разборе [1] пытаются эту цепочку получить из начального символа. Эта проблема весьма важна для класса КС-грамматик из-за их роли в порождении языков программирования [1—3]. Мы опишем еще один класс грамматик, впервые упомянутый в [4], с помощью которого в будущем предполагается облегчить проблему грамматического разбора для КС-грамматик благодаря возможности выводить слова не только из начального символа.

Определение 1. Аксиоматическая грамматика (кратко АК-грамматика)—это упорядоченная тройка $G = \langle V, A, R \rangle$, где V—конечное непустое