УДК 519.233.2

Д. В. СИНЬКЕВИЧ, Н. Н. ТРУШ

О РЕЗУЛЬТАТАХ ВЫЧИСЛЕНИЯ НЕКОТОРЫХ МОМЕНТОВ СЛУЧАЙНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ОДНОРОДНОЙ МАРКОВСКОЙ ЦЕПИ ДЛЯ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ СХЕМЫ

Пусть в каждый из T моментов времени имеются система из $N=N(t)$, $t=\overline{1, T}$ микрообъектов, распределенных по r состояниям, и наблюдения $y_{j,t}$, $j=\overline{1, r}$, $t=\overline{1, T}$, являющиеся относительными частотами попадания микрообъектов в j-е состояние в момент времени t. Математической моделью эволюции каждого из N микрообъектов служит однородная, конечного числа состояний марковская цепь с одной и той же матрицей $P=(p_{ij})$, $i, j=\overline{1, r}$ переходных вероятностей, причем все N марковских цепей независимы.

Пусть $q_{j,t}$, $j=\overline{1, r}$, $t=\overline{1, T}$ обозначает вероятность попадания микрообъекта в j-е состояние в момент времени t; $p_{ij}^{(S)}$, $i, j=\overline{1, r}$, $S=0, 1, 2, \ldots$ обозначает переходную вероятность из i-го состояния в j-е состояние за S шагов. Отметим, что вероятность $q_{j,t}$, $j=\overline{1, r}$, $t=\overline{1, T}$ для каждого отдельного микрообъекта постоянна в данный момент времени и меняется с изменением t. Кроме того, известно [1], что $q_{j,t}$, $j=\overline{1, r}$, $t=\overline{1, T}$ и $p_{ij}^{(S)}$, $i, j=\overline{1, r}$, $S=0, 1, 2, \ldots$ удовлетворяют соотношениям:

$$\sum_{j=1}^{r} q_{j,t}=1, \quad q_{j,t+s}=\sum_{i=1}^{r} q_{i,t}\, p_{ij}^{(s)}. \tag{1}$$

В [1] предложено рассматривать описанную вероятностную модель как полиномиальную. Действительно, пусть в момент времени t, $t=\overline{1, T}$ имеется N микрообъектов. Вероятность того, что в состоянии j, $j=\overline{1, r}$ будут находиться $n_{j,t}$, $j=\overline{1, r}$, $t=\overline{1, T}$ микрообъектов, где

$$n_{j,t}=N(t)\, y_{j,t}, \quad \sum_{j=1}^{r} n_{j,t}=N(t) \tag{2}$$

определим формулой

$$P(n(t) \,|\, q(t),\ N)=N(t)! \cdot \left[\prod_{i=1}^{r} n_{i,t}!\right]^{-1} \cdot \prod_{j=1}^{r} q_{j,t}^{n_{j,t}} \tag{3}$$

с ограничениями (1)—(2). Здесь $n(t)$ — вектор с элементами $n_{i,t}$, $i=\overline{1, r}$, $q(t)$ — вектор с известными элементами $q_{i,t}$, $i=\overline{1, r}$.

Формула (3) является основой для получения оценки максимального правдоподобия матрицы P как по микроданным, так и по агрегированным данным. Процедуры получения оценок достаточно подробно изложены в [1]. Вопрос об асимтотических свойствах оценки максимального правдоподобия по имеющимся агрегированным данным остается открытым до настоящего времени. Одной из первых попыток в этом направлении является упомянутая нами работа [1]. Возьмем за основу идею этой работы и получим формулы вычисления моментов высших порядков агрегированных характеристик однородной марковской цепи.

Пусть $(N)_k=\prod_{i=1}^{k}(N-i+1)$, где k — любое натуральное число, не превосходящее N. Из [2] имеем:

$$E(n_{i,t})=N \cdot q_{i,t}, \quad i=\overline{1, r}, \quad t=\overline{1, T}; \tag{4}$$

$$E(n_{i,t}, n_{j,t})=(N)_2\, q_{i,t} q_{j,t}+N p_{ij}^{(0)} q_{i,t}, \quad i, j=\overline{1, r}, \quad t=\overline{1, T}. \tag{5}$$

Так как $N=N(t)$ носит неслучайный характер, то из соотношений (4)—(5) очевидным образом следуют соответствующие формулы для

$y_{j,t}$, $j = \overline{1, r}$, $t = \overline{1, T}$. Вычисление других моментов рассмотрим в виде лемм, вводя по мере надобности необходимые дополнительные обозначения.

Пусть $j = j(1, 2, \ldots, r)$ обозначает произвольную перестановку индексов $(1, 2, \ldots, r)$; $j(i)$ — i-й член в перестановке j, $i = \overline{1, k}$, $k \leqslant r$. Тогда справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. Для любых $t = \overline{1, T}$; $j(i)$, $i = \overline{1, k}$ имеет место равенство

$$E\left(\prod_{i=1}^{k} n_{j(i),t}\right) = (N)_k \prod_{i=1}^{k} q_{j(i),t}.$$

Доказательство. Рассмотрим случай $k < r$. При этом N элементов системы распределяются по $(k+1)$ классу так, что первые k классов содержат соответственно по $n_{j(i),t}$, $i = \overline{1, k}$, $t = \overline{1, T}$ элементов, а к $(k+1)$ классу отнесем элементы системы, не принадлежащие в данный момент времени t, $t = \overline{1, T}$ ни к одному из них. Этот класс будет содержать $\left(N - \sum_{i=1}^{k} n_{j(i),t}\right)$ элементов в момент времени t, $t = \overline{1, T}$. Вероятность такого разбиения определим по аналогии с (3), т. е.

$$P(\tilde{n}(t) \mid \tilde{q}(t), N) = \frac{N!}{\prod_{i=1}^{k} n_{j(i),t}! \left(N - \sum_{l=1}^{k} n_{j(l),t}\right)!} \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{k} q_{j(i),t}^{n_{j(i),t}} \left(1 - \sum_{l=1}^{k} q_{j(l),t}\right)^{N - \sum_{l=1}^{k} n_{j(l),t}}, \qquad (6)$$

где

$$\tilde{n}(t) = \left(n_{j(1),t},\ n_{j(2),t},\ \ldots,\ n_{j(k),t},\ \left(N - \sum_{l=1}^{k} n_{j(l),t}\right)\right),$$

$$\tilde{q}(t) = \left(q_{j(1),t},\ q_{j(2),t},\ \ldots,\ q_{j(k),t},\ \left(1 - \sum_{l=1}^{k} q_{j(l),t}\right)\right).$$

Далее, исходя из определения математического ожидания, получаем:

$$E\left(\prod_{i=1}^{k} n_{j(i),t}\right) \sum_{\substack{n_{j(i),t} \geqslant 0 \\ i=\overline{1,k}}} \prod_{i=1}^{k} n_{j(i),t} P(\tilde{n}(t) \mid \tilde{q}(t), N),$$

где суммирование осуществляется по всевозможным значениям случайных величин $n_{j(i),t}$, $i = \overline{1, k}$. После несложных преобразований из последнего соотношения следует:

$$E\left(\prod_{i=1}^{k} n_{j(i),t}\right) = (N)_k \prod_{i=1}^{k} q_{j(i),t} \sum_{\substack{n_{j(i),t} \geqslant 1 \\ i=\overline{1,k}}} \frac{1}{\prod_{i=1}^{k} (n_{j(i),t} - 1)!} \times$$

$$\times \frac{(N-k)!}{\left(N - k - \sum_{l=1}^{k} (n_{j(l),t} - 1)\right)!} \prod_{i=1}^{k} q_{j(i),t}^{n_{j(i),t} - 1} \left(1 - \sum_{l=1}^{k} q_{j(l),t}\right)^{N - k - \sum_{l=1}^{k} (n_{j(l),t} - 1)}. \qquad (7)$$

Сумма в правой части (7) равна 1 как $(N-k)$-я степень полинома $\left(q_{j(1),t}+\right.$ $\left.+\ldots+q_{j(k),t}+\left(1-\sum_{l=1}^{k}q_{j(l),t}\right)\right)$. Таким образом, для случая $k<r$ утверждение леммы 1 доказано.

Для случая $k=r$ доказательство проводится аналогичным образом, используя представление (3) непосредственно. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Для любых $t=\overline{1, T}$, $j(i)$, $i=\overline{1, k}$ имеет место равенство

$$E\left(\prod_{i=1}^{m}n_{j(i),t}\prod_{i=m+1}^{k}n_{j(i),t}\right)=\prod_{i=1}^{k}q_{j(i),t}\Big\{(N)_k+(N)_{k+1}\sum_{i=1}^{m}q_{j(i),t}+$$
$$+(N)_{k+2}\sum_{i_1=1}^{m-1}\sum_{i_2=i_1+1}^{m}q_{j(i_1),t}q_{j(i_2),t}+\ldots+(N)_{k+m-1}\times$$
$$\times\sum_{i_1=1}^{2}\sum_{i_2=i_1+1}^{3}\ldots\sum_{i_{m-1}=i_{m-2}+1}^{m}\prod_{v=1}^{m-1}q_{j(i_v),t}+(N)_{k+m}\prod_{v=1}^{m}q_{j(v),t}\Big\},$$

где m — любое целое число из интервала $[0, k]$.

Доказательство. Его также проведем лишь для случая $k<r$. Используя формулу (6), получаем:

$$E\left(\prod_{i=1}^{m}n_{j(i),t}^{2}\prod_{i=m+1}^{k}n_{j(i),t}\right)=\sum_{\substack{n_{j(i),t}>0\\ i=\overline{1,k}}}\prod_{i=1}^{m}n_{j(i),t}^{2}\prod_{i=m+1}^{k}n_{j(i),t}P(\tilde{n}(t)\,|\,\tilde{q}(t), N),$$

где суммирование осуществляется по всевозможным значениям случайных величин $n_{j(i),t}$, $i=\overline{1, k}$.

После несложных преобразований из последнего соотношения следует:

$$E\left(\prod_{i=1}^{m}n_{j(i),t}^{2}\prod_{i=m+1}^{k}n_{j(i),t}\right)\sum_{\substack{n_{j(i),t}\geq 1\\ i=\overline{1,k}}}\prod_{i=1}^{m}n_{j(i),t}\times$$
$$\times\frac{N!}{\prod_{i=1}^{k}(n_{j(i),t}-1)!\left(N-\sum_{l=1}^{k}n_{j(l),t}\right)!}\prod_{i=1}^{k}q_{j(i),t}^{n_{j(i),t}}\left(1-\sum_{l=1}^{k}q_{j(l),t}\right)^{N-\sum_{l=1}^{k}n_{j(l),t}}. \tag{8}$$

Для дальнейшего преобразования правой части соотношения (8) заметим, что

$$\prod_{i=1}^{m}n_{j(i),t}=1+\sum_{i_1=1}^{m}(n_{j(i_1),t}-1)+\sum_{i_1=1}^{m-1}\sum_{i_2=i_1+1}^{m}(n_{j(i_1),t}-1)(n_{j(i_2),t}-1)+\ldots+$$
$$+\sum_{i_1=1}^{2}\sum_{i_2=i_1+1}^{3}\ldots\sum_{i_{m-1}=i_{m-2}+1}^{m}\prod_{v=1}^{m-1}(n_{j(i_v),t}-1)+\prod_{v=1}^{m}(n_{j(v),t}-1). \tag{9}$$

Кроме того, для любого $S=\overline{1, m}$ имеет место равенство:

$$\sum_{\substack{n_{j(i),t}\geq 1\\ i=\overline{1,k}}}\prod_{v=1}^{S}(n_{j(i_v),t}-1)\frac{N!}{\prod_{i=1}^{k}(n_{j(i),t}-1)!\left(N-\sum_{l=1}^{k}n_{j(l),t}\right)!}\times$$
$$\times\prod_{i=1}^{k}q_{j(i),t}^{n_{j(i),t}}\left(1-\sum_{l=1}^{k}q_{j(l),t}\right)^{N-\sum_{l=1}^{k}n_{j(l),t}}=(N)_{k+S}\prod_{i=1}^{k}q_{j(i),t}\prod_{v=1}^{S}q_{j(i_v),t}. \tag{10}$$

Подставляя правую часть соотношения (9) в формулу (8) и используя результаты (7), (10), получаем утверждение леммы 2. Лемма 2 доказана.

Рассмотрим несколько частных случаев утверждения леммы 2. Полагая $m = k = 1$, получаем

$$E(n^2_{j(1),t}) = q_{j(1),t}[N + (N)_2 q_{j(1),t}], \quad t = \overline{1, T}.$$

Полагая $m = k = 2$, получаем

$$E(n^2_{j(1),t} n^2_{j(2),t}) = q_{j(1),t} q_{j(2),t}[(N)_2 + (N)_3 (q_{j(1),t} + q_{j(2),t}) + \\ + (N)_4 q_{j(1),t} q_{j(2),t}], \quad t = \overline{1, T}.$$

Полагая $m = 1$, $k = 2$, получаем

$$E(n^2_{j(1),t} n_{j(2),t}) = q_{j(1),t} q_{j(2),t}[(N)_2 + (N)_3 q_{j(1),t}], \quad t = \overline{1, T}.$$

Полагая $m = 1$, $k = 3$, получаем

$$E(n^2_{j(1),t} n_{j(2),t} n_{j(3),t}) = q_{j(1),t} q_{j(2),t} q_{j(3),t}[(N)_3 + (N)_4 q_{j(1),t}], \quad t = \overline{1, T}.$$

Далее, пусть $\Omega_k = (1, 2, \ldots, k)$, $\omega(\Omega_k)$ — функция мощности множества Ω_k; $\Omega_k(s)$ — некоторое подмножество множества Ω_k, имеющее мощность S, $0 \leqslant S \leqslant k$; $\sum\limits_{\Omega_k(S)}$ — суммирование по всем C_k^S подмножествам $\Omega_k(S)$. Тогда справедливо следующее утверждение.

Лемма 3. Для любых $t = \overline{1, T}$, $j(i)$, $i = \overline{1, k}$ имеет место равенство:

$$E\left(\prod_{i=1}^{l} n^3_{j(i),t} \prod_{i=l+1}^{m} n^2_{j(i),t} \prod_{i=m+1}^{k} n_{j(i),t}\right) = \prod_{i=1}^{k} q_{j(i),t} \times \\ \times \sum_{S=0}^{m} \sum_{\Omega_m(S)} 2^{\omega(\Omega_l \cap \Omega_m(S))} \prod_{i \in \Omega_m(S)} q_{j(i),t} \times \\ \times \sum_{Z=0}^{l} \sum_{\Omega_l(Z)} (N)_{k+S+Z}\, 2^{-\omega(\Omega_l(Z) \cap \Omega_m(S))} \prod_{i \in \Omega_l(Z)} q_{j(i),t}$$

где l, m — любые целые числа из интервала $[0, k]$ такие, что $l \leqslant m$.

Доказательство. Его, как и доказательство леммы 2, проведем лишь для случая $k < r$. Используя формулу (6), получаем:

$$E\left(\prod_{i=1}^{l} n^3_{j(i),t} \prod_{i=l+1}^{m} n^2_{j(i),t} \prod_{i=m+1}^{k} n_{j(i),t}\right) = \sum_{\substack{n_{j(i),t} > 0 \\ i=\overline{1,k}}} \prod_{i=1}^{l} n^3_{j(i),t} \times \\ \times \prod_{i=l+1}^{m} n^2_{j(i),t} \prod_{i=m+1}^{k} n_{j(i),t} P(\tilde{n}(t) \mid \tilde{q}(t), N),$$

где суммирование осуществляется по всевозможным значениям случайных величин $n_{j(i),t}$, $i = \overline{1, k}$. Применяя к правой части последнего соотношения последовательно преобразования, которые использовались при доказательстве лемм 1, 2, получим:

$$E\left(\prod_{i=1}^{l} n^3_{j(i),t} \prod_{i=l+1}^{m} n^2_{j(i),t} \prod_{i=m+1}^{k} n_{j(i),t}\right) = \sum_{\substack{n_{j(i),t} > 1 \\ i=\overline{1,k}}} n_{j(1),t} \ldots n_{j(l),t} \times \\ \times \Bigg\{1 + \sum_{i_1=1}^{m} (n_{j(i_1),t} - 1) + \sum_{i_1=1}^{m-1} \sum_{i_2=i_1+1}^{m} (n_{j(i_1),t} - 1)(n_{j(i_2),t} - 1) + \\ + \ldots + \sum_{i_1=1}^{2} \sum_{i_2=i_1+1}^{3} \ldots \sum_{i_{m-1}=i_{m-2}+1}^{m} (n_{j(i_1),t} - 1) \ldots (n_{j(i_{m-1}),t} - 1) + \quad (11)$$

$$+ (n_{j(1),t}-1)(n_{j(2),t}-1)\ldots(n_{j(m),t}-1)\} \times$$

$$\times \frac{N!}{\prod_{i=1}^{k}(n_{j(i),t}-1)!\left(N-\sum_{i=1}^{k} n_{j(i),t}\right)!} \prod_{i=1}^{k} q_{j(i),t}^{n_{j(i),t}} \left(1-\sum_{i=1}^{k} q_{j(i),t}\right)^{N-\sum_{i=1}^{k} n_{j(i),t}}.$$

Используя принятые обозначения, перепишем правую часть соотношения (11) в другой равносильной форме. Получим

$$E\left(\prod_{i=1}^{l} n_{j(i),t}^{3} \prod_{i=l+1}^{m} n_{j(i),t}^{2} \prod_{i=m+1}^{k} n_{j(i),t}\right) = \prod_{i=1}^{k} q_{j(i),t} \times$$

$$\times \sum_{S=0}^{m} \sum_{\Omega_m(S)} \sum_{\substack{n_{j(i),t} \geq 1 \\ i=\overline{1,k}}} \left\{ \prod_{i\in\Omega_m(S)} (n_{j(i),t}-1) \prod_{i\in\Omega_l\cap\Omega_m(S)} n_{j(i),t} \prod_{i\in\Omega_l/\Omega_m(S)} n_{j(i),t} \times\right.$$

$$\left.\times \frac{N!}{\prod_{i=1}^{k}(n_{j(i),t}-1)!\left(N-\sum_{i=1}^{k} n_{j(i),t}\right)!} \prod_{i=1}^{k} q_{j(i),t}^{n_{j(i),t}} \left(1-\sum_{i=1}^{k} q_{j(i),t}\right)^{N-\sum_{i=1}^{k} n_{j(i),t}}\right\}. \tag{12}$$

Далее, так как

$$\prod_{i\in\Omega_l\cap\Omega_m(S)} n_{j(i),t} \prod_{i\in\Omega_l/\Omega_m(S)} n_{j(i),t} = \prod_{i\in\Omega_l\cap\Omega_m(S)} (n_{j(i),t}-2+2) \times$$

$$\times \prod_{i\in\Omega_l/\Omega_m(S)} (n_{j(i),t}-1+1) = \sum_{Z=0}^{l} \sum_{\Omega_l(Z)} 2^{\omega(\Omega_l\cap\Omega_m(S))-\omega(\Omega_l(Z)/\Omega_m(S))} \times$$

$$\times \prod_{i\in\Omega_l(Z)\cap\Omega_m(S)} (n_{j(i),t}-2) \prod_{i\in\Omega_l(Z)/\Omega_m(S)} (n_{j(i),t}-1),$$

то, подставляя правую часть последнего равенства в формулу (12), получим:

$$E\left(\prod_{i=1}^{l} n_{j(i),t}^{3} \prod_{i=l+1}^{m} n_{j(i),t}^{2} \prod_{i=m+1}^{k} n_{j(i),t}\right) = \prod_{i=1}^{k} q_{j(i),t} \times$$

$$\times \sum_{S=0}^{m} \sum_{\Omega_m(S)} 2^{\omega(\Omega_l\cap\Omega_m(S))} \prod_{i\in\Omega_m(S)} q_{j(i),t} \times \sum_{Z=0}^{l} \sum_{\Omega_l(Z)} 2^{-\omega(\Omega_l(Z)\cap\Omega_m(S))} \prod_{i\in\Omega_l(Z)} q_{j(i),t} \times$$

$$\times \sum_{n_{j(i),t}\geq 1} \frac{N!}{\prod_{i\in\Omega_l(Z)\cap\Omega_m(S)} (n_{j(i),t}-3)! \prod_{i\in\Omega_m(S)\cup\Omega_l(Z)} (n_{j(i),t}-2)!} \times$$

$$\times \frac{1}{\prod_{i\in\Omega_k/(\Omega_m(S)\cup\Omega_l(Z))} (n_{j(i),t}-1)!\left(N-\sum_{i=1}^{k} n_{j(i),t}\right)!} \prod_{i\in\Omega_l(Z)\cap\Omega_m(S)} q_{j(i),t}^{n_{j(i),t}-3} \times$$

$$\times \prod_{i\in\Omega_m(S)\cup\Omega_l(Z)} q_{j(i),t}^{n_{j(i),t}-2} \prod_{i\in\Omega_k/\Omega_m(S)\cup\Omega_l(Z))} q_{j(i),t}^{n_{j(i),t}-1} \left(1-\sum_{i=1}^{k} q_{j(i),t}\right)^{N-\sum_{i=1}^{k} n_{j(i),t}}.$$

Применяя в заключение преобразования, аналогичные выводу соотношения (7), на основании известных свойств полиномиального распределения получаем утверждение леммы 3. Лемма 3 доказана.

Рассмотрим несколько частных случаев утверждения леммы 3. Полагая $l = m = k = 1$, получим:

$$E(n^3_{i,t}) = q_{i,t}[(N + (N)_2 q_{i,t}) + 2q_{i,t}((N)_2 + (N)_3 2^{-1} q_{i,t})] =$$
$$= q_{i,t}[N + 3(N)_2 q_{i,t} + (N_3) q^2_{i,t}], \quad i = \overline{1, r}; \ t = \overline{1, T}.$$

Полагая $l = m = k = 2$, получим:

$$E(n^3_{i,t} n^3_{j,t}) = q_{i,t} q_{j,t}[((N)_2 + (N)_3 (q_{i,t} + q_{j,t}) + (N)_4 q_{i,t} q_{j,t}) +$$
$$+ (2q_{i,t}((N)_3 + (N)_4 (2^{-1} q_{i,t} + q_{j,t}) + (N)_5 2^{-1} q_{i,t} q_{j,t}) +$$
$$+ 2q_{j,t}((N)_3 + (N)_4 (q_{i,t} + 2^{-1} q_{j,t}) + (N)_5 2^{-1} q_{i,t} q_{j,t})) +$$
$$+ 4q_{i,t} q_{j,t}((N)_4 + (N)_5 2^{-1}(q_{i,t} + q_{j,t}) + (N)_6 2^{-2} q_{i,t} q_{j,t})] =$$
$$= q_{i,t} q_{j,t}[(N)_2 + 3(N)_3 (q_{i,t} + q_{j,t}) + (N)_4 (q^2_{i,t} + 9q_{i,t} q_{j,t} + q^2_{j,t}) +$$
$$+ 3(N)_5 q_{i,t} q_{j,t} (q_{i,t} + q_{j,t}) + (N)_6 q^2_{i,t} q_{j,t}], \quad i, j = \overline{1, r}; \quad i \neq j, \quad t = \overline{1, T}$$

Полагая $l = 1$, $m = 2$, $k = 3$, получим в итоге

$$E(n^3_{j(1),t} n^2_{j(2),t} n_{j(3),t}) = q_{j(1),t} q_{j(2),t} q_{j(3),t}[(N)_3 + (N)_4 (3q_{j(1),t} + q_{j(2),t}) +$$
$$+ (N)_5 q_{j(1),t}(q_{j(1),t} + 3q_{j(2),t}) + (N)_6 q^2_{j(1),t} q_{j(2),t}], \quad t = \overline{1, T}.$$

В заключение отметим также, что, полагая $l = 0$, из леммы 3 получим утверждение леммы 2, а при $l = m = 0$ — леммы 1. Кроме того, лемма 3 обобщает результаты работы [2], т. е. леммы 2, 4, 6, применительно к одному и тому же моменту наблюдения.

Список литературы

1. Ли Ц., Джадж Д., Зельнер А. Оценивание параметров марковских моделей по агрегированным временным рядам. М., 1977.

2. Синькевич Д. В., Труш Н. Н. О результатах вычисления некоторых моментов высших порядков агрегированных случайных характеристик однородной марковской цепи // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1987. № 2. С. 40.

Поступила в редакцию 08.10.91.