

Второй тестовый пример представляет задачу односторонней аппроксимации функции $\text{tg}(t)$ полиномом $(n-1)$ -й степени $\sum_{i=1}^n x_i t^{i-1}$ на отрезке $T = [0, 1]$ в пространстве $L_1(T)$ [3]:

$$\sum_{i=1}^n x_i / i \rightarrow \min, \\ x_1 + tx_2 + \dots + t^{n-1}x_n \geq \text{tg}(t), t \in T, x \in \mathbb{R}^n. \quad (4)$$

В [3] задачу (4) не удалось решить при $n > 8$ из-за потери точности в вычислениях. Она не была решена и процедурой MLS11D при $n > 8$ из-за того, что опорная задача не смогла идентифицировать структуру опоры. Процедура SIP решила задачу при $n \leq 11$. Результаты решения задачи (4) приведены в табл. 2.

Замечания.

1. В программе MLS11D значения $A(t)$, $b^*(t)$, $b_*(t)$, $t \in T$, в узлах сетки $S_e(T)$, в которых проверялись основные ограничения, каждый раз вычислялись заново, а в программе SIP — хранились в памяти.

2. Время решения задачи (1) программой SIP не включает времени создания сетки $S_e(T)$.

Список литературы

1. Медведев В. Г. Линейные полубесконечные экстремальные задачи. Теория, алгоритмы и численный эксперимент // Междунар. советско-польский семинар: Тез. докл. Мн., 1989. С. 190.
2. Курницкий Б. Я., Алексеев Г. П., Виткин Ю. В. Применение пакетов прикладных программ по экономико-математическим методам в АСУ. М., 1980.
3. Watson G. A. // Lect. Notes Econ. and Math. Systems. 1983. V. 215. P. 193.

Поступила в редакцию 05.04.91.

УДК 517.577

Л. Е. ЗАБЕЛЛО, В. М. РАЧОК

ОДНО РЕШЕНИЕ ВЫРОЖДЕННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Исследуется специальный класс дискретных управлений типа обратной связи. Метод определения параметров управления близок к известному методу А. Манитуса для исследования невырожденных задач в классе кусочно-непрерывных управлений. Отметим, что в этом классе решение вырожденной задачи не существует.

Рассмотрим систему управления:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + \int_0^h K_1(s)x(t-s)ds + B(t)u(t), t \in T = [t_0, t_1], \quad (1)$$

$$x_0(\cdot) = \{\gamma(\tau) \mid \tau \in [t_0 - h, t_0], x(t_0) = x_0\}, \quad (2)$$

где x — n -вектор, u — m -вектор, $m < n$; $\gamma(t)$ — заданная кусочно-непрерывная n -векторная функция на $[t_0 - h, t_0]$, x_0 — заданный n -вектор; $A(t)$, $K_1(s)$, $B(t)$ — непрерывные матрицы своих размерностей, $\text{rank } B(t) \equiv m$, $t \in T$; под $u(t)$, $t \in T$, будем понимать кусочно-постоянные управления с заданными точками разрыва p_i , $i = 1, N-1$, $p_{i+1} = p_i + \Delta$, $\Delta > 0$, $p_0 = t_0$, $p_N = t_1$; $h > 0$ — постоянное запаздывание.

Качество процесса управления оценивается функционалом

$$I(u) = \int_{t_0}^{t_1} x'(t) D(t) x(t) dt \rightarrow \min, \quad (3)$$

где $D(t) > 0$, $D'(t) = D(t)$ — непрерывная матричная функция, $t \in T$.

Задача 1. Найти оптимальное управление $u^0(t)$, $t \in T$, для (1) — (3) в классе кусочно-постоянных функций с заданными точками разрыва.

Задача 2. Для системы (1) — (3) найти оптимальное управление в форме обратной связи:

$$u^0(t) = u_i^0 = \mu_i x(p_{i-1}) + \int_0^h \mu_i(-r) x(p_{i-1} - r) dr, \quad (4)$$

$$i = \overline{1, N}, \quad t \in [p_{i-1}, p_i].$$

При решении задачи 1 потребуется формула Коши для решения системы (1) — (2) [1]:

$$x(t) = F(t, t_0) x_0 + \int_{t_0-h}^{t_0} \int_{t_0-\tau}^h F(t, \tau+s) K_1(s) x_0(\tau) ds d\tau + \\ + \int_{t_0}^t F(t, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau, \quad (5)$$

где $F(t, \tau)$ — матричная функция, удовлетворяющая уравнению:

$$\frac{\partial F(t, \tau)}{\partial \tau} = -F(t, \tau) A(\tau) - \int_0^h F(t, \tau+s) K_1(s) ds, \\ \tau \leq t, \quad F(t, t-0) = E, \quad F(t, \tau) = 0, \quad \tau > t.$$

Учитывая (5), запишем (3) в виде:

$$l(u) = 2 \sum_{i=1}^N u_{i-1} \int_{p_{i-1}}^{p_i} B'(\tau_2) K_2(t_0, \tau_2) d\tau_2 x_0 + 2 \sum_{i=1}^N u_{i-1} \int_{t_0-h}^{t_0} \int_{p_{i-1}}^{p_i} B'(\tau_2), \\ K_3(t_0, \tau_2, \tau_3) d\tau_2 x_0(\tau_3) d\tau_3 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N u_{i-1} \int_{p_{i-1}}^{p_i} \left[B'(\tau_2) \int_{p_{j-1}}^{p_j} K_4(t_0, \tau_2, \tau_4), \right. \\ \left. B(\tau_4) d\tau_4 \right] d\tau_2 u_{j-1} + c, \quad (6)$$

где

$$K_2(t_0, \tau_2) = \int_{\tau_2}^{t_0} F'(t, \tau_2) D(t) F(t, t_0) dt, \\ K_3(t_0, \tau_2, \tau_3) = \int_{\tau_0}^{t_1} \int_{t_0-\tau_3}^h F'(t, \tau_2) D(t) F(t, \tau_3+s_3) K_1(s_3) ds_3 dt, \\ K_4(t_0, \tau_2, \tau_4) = \int_{\max(\tau_2, \tau_4)}^{t_1} F'(t, \tau_2) D(t) F(t, \tau_4) dt, \\ c = x_0' \int_{t_0}^{t_1} F'(t, t_0) K(s) D(t) F(t, t_0) dt x_0 + 2 x_0' \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0-h}^{t_0} \int_{t_0-\tau_3}^h F'(t, t_0), \\ D(t) F(\tau_3+s_3) K_1(s_3) x_0(\tau_3) ds_3 d\tau_3 dt + \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0-h}^{t_0} \int_{t_0-\tau_4}^h \int_{t_0-h}^{t_0} x_0'(\tau_1), \\ K_1(s_1) F'(t, \tau_1+s_1) D(t) F(t, \tau_3+s_3) K_1(s_3), \quad x_0(\tau_3) ds_3 d\tau_3 ds_1 d\tau_1 dt. \quad (7)$$

Отметим, что выражения (7) совпадают с матричными импульсами задачи (1) — (3) [2].

Введем обозначения:

$$\Phi_{2,i} = \int_{p_{i-1}}^{p_i} B'(\tau_2) K_2(t_0, \tau_2) d\tau_2,$$

$$\begin{aligned}
\Phi_2^* &= (\Phi_{2,1}^*, \Phi_{2,2}^* \dots, \Phi_{2,N}^*)'; \\
\Phi_{3,i}(\tau_1) &= \int_{p_{i-1}}^{p_i} K_3(t_0, \tau_1, \tau_1) B(\tau_1) d\tau_1, \\
\Phi_3^*(\tau_1) &= (\Phi_{3,1}^*(\tau_1), \Phi_{3,2}^*(\tau_1), \dots, \Phi_{3,N}^*(\tau_1))'; \\
\Phi_{4,i,j} &= \int_{p_{i-1}}^{p_i} B'(\tau_2) \left[\int_{p_{j-1}}^{p_j} K_4(t_0, \tau_2, \tau_1) B(\tau_1) d\tau_1 \right] d\tau_2, \\
\Phi_4 &= \begin{bmatrix} \Phi_{4,11} & \dots & \Phi_{4,1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_{4,N1} & \dots & \Phi_{4,NN} \end{bmatrix}, \quad \Phi_4^* = \Phi_4; \\
\bar{u}' &= (u_1', \dots, u_N'), \quad u_i \in R^m, \quad i = \overline{1, N}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Учитывая (8), запишем (6) в виде:

$$1(u) = c + 2\bar{u}'\Phi_2 x_0 + 2\bar{u}' \int_{t_0-h}^{t_0} \Phi_3(\tau_3) x_0(\tau_3) d\tau_3 + \bar{u}' \Phi_4 \bar{u}. \tag{9}$$

При сделанных предположениях относительно $B(t)$, $D(t)$, $t \in T$, получим $\Phi_4 > 0$, а это обеспечивает существование минимума функционала (8), и, следовательно, существование решения задачи (1)–(3) в заданном классе кусочно-постоянных функций. Из (8) следует, что оптимальное управление $\bar{u}_0(t)$, $t \in T$, удовлетворяет условию

$$\Phi_2 x_0 + \int_{t_0-h}^{t_0} \Phi_3(\tau_3) x_0(\tau_3) d\tau_1 + \Phi_4 \bar{u}^0 = 0,$$

или в покомпонентной форме

$$\begin{aligned}
\Phi_{4,11} u_1^0 + \Phi_{4,12} u_2^0 + \dots + \Phi_{4,1N} u_N^0 &= f_1, \\
\Phi_{4,21} u_1^0 + \Phi_{4,22} u_2^0 + \dots + \Phi_{4,2N} u_N^0 &= f_2, \\
\vdots & \\
\Phi_{4,N1} u_1^0 + \Phi_{4,N2} u_2^0 + \dots + \Phi_{4,NN} u_N^0 &= f_N,
\end{aligned} \tag{10}$$

где $f_i = -\Phi_{2,i} x_0 - \int_{t_0-h}^{t_0} \Phi_{3i}(\tau_3) x_0(\tau_3) d\tau_3$, $i = \overline{1, N-1}$.

Так как $\Phi_4 > 0$, то из (10) получим:

$$u_N^0 = \Phi_{4,NN}^{-1} f_N - \sum_{i=1}^{N-1} \Phi_{4,NN}^{-1} \Phi_{4, Ni} u_i^0. \tag{11}$$

Подставив (11) в (10), имеем:

$$\begin{aligned}
\Phi_{4,11}^1 u_1^0 + \Phi_{4,12}^1 u_2^0 + \dots + \Phi_{4,1N-1}^1 u_{N-1}^0 &= f_1^1, \\
\Phi_{4,21}^1 u_1^0 + \Phi_{4,22}^1 u_2^0 + \dots + \Phi_{4,2N-1}^1 u_{N-1}^0 &= f_2^1, \\
\vdots & \\
\Phi_{4,N-1,1}^1 u_1^0 + \Phi_{4,N-1,2}^1 u_2^0 + \dots + \Phi_{4,N-1,N-1}^1 u_{N-1}^0 &= f_{N-1}^1,
\end{aligned} \tag{12}$$

где $f_i^1 = f_i - \Phi_{4,iN} \Phi_{4,NN}^{-1} f_N$, $\Phi_{4,ij}^1 = \Phi_{4,ij} - \Phi_{4,iN} \Phi_{4,NN}^{-1} \Phi_{4,Nj}$, $i, j = \overline{1, N-1}$.

Поскольку $\Phi_{4,N-1,1}^1 > 0$, то, продолжив процесс исключения u_i^0 , $i = N-1, N-2, \dots, 1$, в итоге получим:

$$u_{N-k}^0 = (\Phi_{4,N-k,N-k}^1)^{-1} \left(f_{N-k}^1 - \sum_{i=1}^{N-k-1} \Phi_{4,N-k,i}^1 u_i^0 \right), \quad \sum_{i=1}^0 (\dots) = 0. \tag{13}$$

$$f_i^k = f_i^{k-1} - \Phi_{4,i,N-k+1}^{k-1} (\Phi_{4,N-k+1,N-k+1}^{k-1})^{-1} f_{N-k+1}^{k-1}. \quad (14)$$

$$\Phi_{4,ij}^k = \Phi_{4,ij}^{k-1} - \Phi_{4,i,N-k+1}^{k-1} (\Phi_{4,N-k+1,N-k+1}^{k-1})^{-1} \Phi_{4,N-k+1,j}^{k-1}, \quad (15)$$

$$f_i^0 = f_i, \quad \Phi_{4,ij}^0 = \Phi_{4,ij}, \quad k = \overline{1, N-1}, \quad i, j = \overline{1, N-k}.$$

Подставляя в (13) $k = N-1, \dots, 1$, получим оптимальные участки кусочно-постоянного управления.

Теорема 1. Оптимальное управление в выбранном классе кусочно-постоянных функций задается соотношениями (13)–(15).

Приступим к решению задачи 2.

Положим

$$f_i^k = \alpha_i^k + \int_0^h \beta_i^k(-r) x(p_i - r) dr, \quad (16)$$

где

$$\alpha_i^k = \alpha_i^{k-1} - \Phi_{4,i,N-k+1}^{k-1} (\Phi_{4,N-k+1,N-k+1}^{k-1})^{-1} \alpha_{N-k+1}^{k-1}, \quad (17)$$

$$\beta_i^k(r) = \beta_i^{k-1}(r) - \Phi_{4,i,N-k+1}^{k-1} (\Phi_{4,N-k+1,N-k+1}^{k-1})^{-1} \beta_{N-k+1}^{k-1}(r), \quad (18)$$

$$\alpha_i^0 = \alpha_i = -\Phi_{2,i}, \quad \beta_i^0(-r) = \beta_i(-r) = -\Phi_{3,i}(r), \quad i = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, N-1}.$$

Определим на первом шаге

$$\Phi_2 = \Phi_2(t_0), \quad \Phi_3(r) = \Phi_3(t_0, r), \quad \Phi_4 = \Phi_4(t_0), \quad f_j = f_j(t_0), \quad N = N(t_0).$$

Для u_1^0 имеем из (13):

$$u_1^0 = (\Phi_{4,1,1}^{N(t_0)-1})^{-1} f_1^{N(t_0)-1} = (\Phi_{3,1,1}^{N(t_0)-1})^{-1} (\alpha_1^{N(t_0)-1} x(t_0) + \\ + \int_0^h \beta_1^{N(t_0)-1}(-r) x(t_0 - r) dr) = g_{1,1} x(t_0) + \int_0^h g_{2,1}(-r) x(t_0 - r) dr.$$

Проводя замену t_0 на p_i , получим следующие соотношения для u_i^0 , $1 \leq i \leq N$:

$$u_i^0 = g_{1,i} x(p_{i-1}) + \int_0^h g_{2,i}(-r) x(p_{i-1} - r) dr, \quad (19)$$

$$g_{1,i} = (\Phi_{4,1,1}^{N(p_{i-1})-1})^{-1} \alpha_1^{N(p_{i-1})-1}, \quad (20)$$

$$g_{2,i}(r) = (\Phi_{4,1,1}^{N(p_{i-1})-1})^{-1} \beta_1^{N(p_{i-1})-1}(r), \quad 1 \leq i \leq N. \quad (21)$$

Учитывая вышесказанное, получаем, что справедлива

Теорема 2. Для задачи (1)–(3) оптимальное управление в форме обратной связи (4) существует и определяется формулой (19), коэффициенты в которой вычисляются по формулам (17), (18), (20), (21).

Замечание. Вырожденность функционала (3) понимается в смысле работы [3].

Список литературы

1. Габасов Р. Ф., Кирilloва Ф. М. Оптимизация линейных систем. Мн., 1973.
2. Забелло Л. Е., Смородни В. С. // Дифференциальные уравнения. 1989. Т. 25. № 11. С. 2000.
3. Bell D. J., Jacobson D. H. Singular optimal control problems. London — New York — San-Francisco, 1975.

Поступила в редакцию 11.04.91.